ГЛАВА 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

4.1 Принятие решений в условиях неопределенности. Понятие об игровых моделях

Неопределенность является характеристикой внешней среды, в которой принимается управленческое решение о развитии или функционировании экономического объекта. Внешняя среда может находиться в одном из множества возможных состояний. Таким образом, по сути, мы имеем в наличии игру, с одной стороны которой находится нами изучаемый объект или экономическая система, а с другой – конкурент в лице действительного лица, либо комплекса внешних условий, т.е. теория игр изучает ситуации принятия решений несколькими взаимодействующими индивидами (агентами, участниками и т.д., в дальнейшем называемыми *игроками*). Такие ситуации часто возникают в экономической, политической, биологической и пр. обстановках. Нас будут интересовать в основном экономические и управленческие ситуации.

Классический пример – изучение олигополии, но имеется и множество других примеров – торги и аукционы, международная торговля, в микроэкономике, - доход предприятия от продажи ассортимента изделий зависит не только от установленной на него цены, но и от объема продаж; или при выборе стратегии производства товаров, выпускаемых предприятием, необходимо учитывать конкурентоспособность ассортимента товара и т.п. Поэтому теория игр стала составной частью курсов микро- и макроэкономики, отчасти их языком.

4.2 Матричная игра

Теория игр рассматривает социально-экономические ситуации, связанные с принятием решений, в которых, по крайней мере, два противника имеют конфликтующие цели. К числу типичных примеров теории игр относятся, например, борьба нескольких фирм за государственный заказ, обменные и торговые операции и др.

Во многих практических задачах возникают ситуации, когда требуется принять решение, не имея достаточной информации. Неизвестными могут быть как условия осуществления какой-либо операции, так и сознательные действия лиц, от которых зависит успех этой операции.

Ситуации, в которых сталкиваются интересы двух сторон и результат любой операции, осуществляемой одной из сторон, зависит от действий другой стороны, называются конфликтными.

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой, а математическая теория, помогающая принимать рациональные решения в конфликтной ситуации, − теорией игр.

Конфликтующие стороны называются игроками, а действия, которые могут выполнять игроки, − стратегиями.

От реальной ситуации игра отличается тем, что в игре противники действуют по строго определенным правилам.

Матричной игрой называется игра, осуществляемая по следующим правилам:

1. В игре участвуют два игрока;
2. Каждый из игроков обладает конечным набором стратегий;
3. Игра заключается в том, что каждый из игроков, не имея информации о действиях противника, делает один ход (выбирает одну из своих стратегий). Результатом выбора игроками стратегий является выигрыш и проигрыш в игре.
4. И выигрыш, и проигрыш выражаются числами.

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i = 1, 2, \ldots, m,$ второй имеет n стратегий $j = 1, 2, \ldots, n$. Каждой паре стратегий (i, j) поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш первого игрока за счет второго игрока, если первый игрок примет свою i-ю стратегию, а второй – свою j-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: первый игрок выбирает свою i-ю стратегию $\left(i = \overline{1,\ m}\right)$, второй – свою j-ю стратегию $\left(j = \overline{1,\ n}\right)$, после чего первый игрок получает выигрыш a_{ij} за счет второго игрока (если $a_{ij} < 0$, то это значит, что первый игрок платит второму сумму $\left|a_{ij}\right|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i = \overline{1,\ m};\ j = \overline{1,\ n}$ часто называется ***чистой стратегией***.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору первым игроком i-й строки, а вторым игроком j-го столбца и получения первым игроком (за счет второго игрока) выигрыша a_{ij}. Матрица A называется *платежной матрицей* игры.

Пример 1. Игра, называемая «Открывание пальцев», заключается в следующем. Два игрока одновременно из сжатого кулака правой руки открывают по нескольку пальцев. Общее количество открытых пальцев является суммой выигрыша, причем, если общее количество открытых пальцев четно, то выигрывает первый игрок, если же общее количество открытых пальцев нечетно, то выигрывает второй игрок. Составить платежную матрицу игры.

Решение. Поскольку каждый из игроков может открыть 1, 2, 3, 4 или 5 пальцев, то у каждого из них имеется по 5 соответствующих стратегий: стратегии A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 у первого игрока, и B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 - у второго. Таким образом, рассматриваемая игра является матричной игрой типа 5x5, и можно составить таблицу выигрышей, в зависимости от стратегий, применяемых игроками:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	3	4	5	6
A_2	3	4	5	6	7
A_3	4	5	6	7	8
A_4	5	6	7	8	9
A_5	6	7	8	9	10

Из таблицы следует, что платежная матрица игры имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Для принятия оптимального управленческого решения необходимо иметь некоторый способ сравнения двух стратегий. Самый простой и естественный принцип, по которому можно их сравнить - это принцип доминирования, состоящий в следующем: если в платежной матрице ***A*** все элементы строки $A_i=\left(a_{i1},\, a_{i2},\, ...,\, a_{in}\right)$ не меньше соответствующих элементов строки $A_k=\left(a_{k1},\, a_{k2},\, ...,\, a_{kn}\right)$, по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется ***доминирующей***, а строка A_k ***доминируемой***. Аналогичны понятия доминирующего и доминируемого столбцов.

Первому игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки, второму игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминирующие столбцы, поэтому при решении игры можно уменьшить размеры платежной матрицы путем удаления из нее доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Пример 2. Исследовать игру, заданную следующей матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1-я строка доминирует над 2-й и 3-й, так как все ее элементы соответственно не меньше элементов 2-й и 3-й строк. Поэтому стратегии первого игрока A_2 и A_3 заведомо менее выгодны, чем A_1, и могут быть исключены. В результате получаем матрицу $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

В этой матрице 1-й, 4-й и 5-й столбцы доминируют над 2-м. Поскольку столбцы характеризуют стратегии игрока второго игрока (*B)*, стремящегося уменьшить выигрыш игрока *A*, то эти стратегии заведомо невыгодны. После их исключения получаем матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, в которой нет доминирующих стратегий.

4.3 Алгоритм решения матричной игры

В таблице представлены варианты решения игры, заданной платежной матрицей А.

	Наличие седловой точки	**Отсутствие седловой точки**
Тип стратегии	Чистая стратегия	Смешанная стратегия
Метод решения	Решение найдено	1.Через систему уравнений. 2.Графический метод. 3.Использование симплекс-метода.

Описание алгоритма:

1. На основании анализа платёжной матрицы следует определить, существуют ли в ней доминируемые стратегии, и исключить их.
2. Найти верхнюю и нижнюю цены игры и определить, имеет ли данная игра седловую точку (нижняя цена игры должна быть равна верхней цене игры).
3. Если седловая точка существует, то оптимальными стратегиями игроков, являющимися решением игры, будут их чистые стратегии, соответствующие седловой точке. Цена игры равна верхней и нижней цены игры, которые равны между собой.
4. Если игра не имеет седловой точки, то решение игры следует искать в смешанных стратегиях. Для определения оптимальных смешанных стратегий в играх $m \times n$ следует использовать симплекс-метод, предварительно переформулировав игровую задачу в задачу линейного программирования. Представим алгоритм решения матричной игры графически.

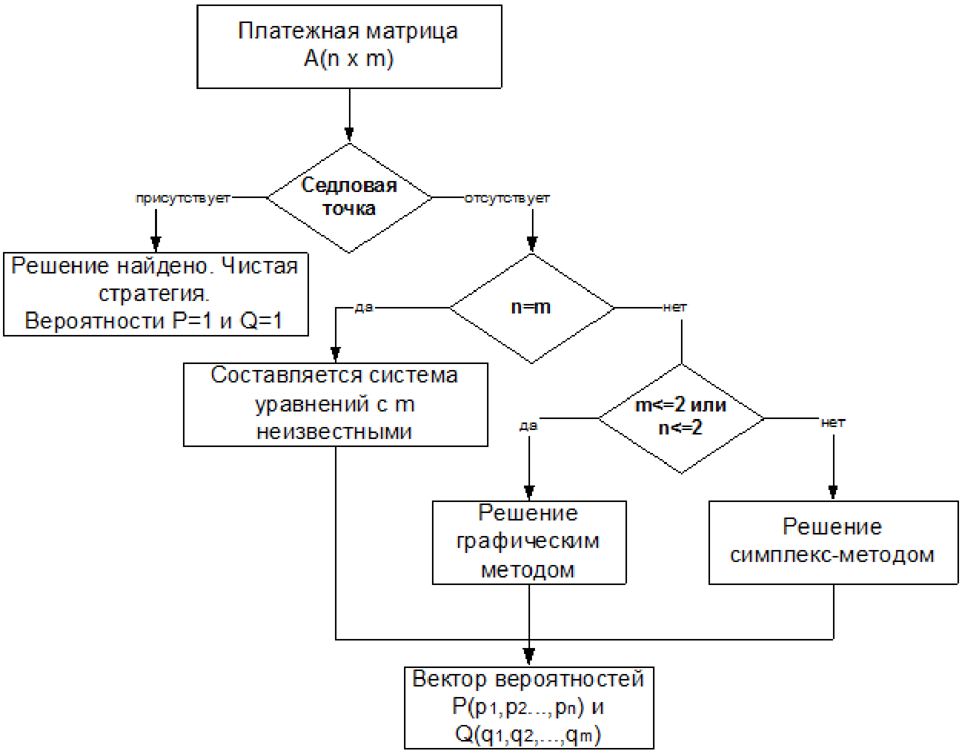


Рисунок - Схема решения матричной игры

Методы решения матричной игры в смешанных стратегиях

Если седловая точка отсутствует, решение игры проводят в смешанных стратегиях и решают следующими методами:

1. Решение игры через систему уравнений.

Если задана квадратная матрица $n \times n$ $(n = m)$, то вектор вероятностей можно найти, решив систему уравнений. Этот метод используется не всегда и применим только в отдельных случаях (если матрица 2×2, то решение игры получается практически всегда). Если в решении получаются отрицательные вероятности, то данную систему решают симплекс-методом.

2. Решение игры графическим методом.

В случаях, когда $n = 2$ или $m = 2$, матричную игру можно решить графически.

3. Решение матричной игры симплекс-методом.

В этом случае матричная игра сводится к задаче линейного программирования.

4.4 Решение матричных игр в чистых стратегиях

Ключевым моментом в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. Основной метод, позволяющий найти оптимальную стратегию в условиях неопределенности, состоит в следующем: формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать единственную численную оценку каждой стратегии. Оптимальной считается та стратегия, для которой численная оценка является максимальной.

Заметим, что задание оценки каждой стратегии позволяет сравнить любые две стратегии: из двух стратегий лучшей считается та, которая имеет большую оценку (стратегии, имеющие одинаковую численную оценку, считаются эквивалентными). Таким образом, задание оценок стратегий устанавливает критерий для сравнения стратегий. Рассмотрим теперь важнейшие критерии, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенности.

КРИТЕРИЙ ЛАПЛАСА L основан на гипотезе равновероятности применения стратегий и содержательно может быть сформулирован следующим образом: ***«поскольку мы ничего не знаем о состояниях*** **экономической** (управленческой или др.) ***среды, их*** (стратегии) ***надо считать равновероятными»***. Иногда этот принцип называется также принципом недостаточного основания. При принятии данной гипотезы в качестве оценки стратегии *i* надо брать соответствующий ей средний выигрыш, то есть

$$L(i)=\frac{1}{m}\cdot\sum a_{ij}, \text{ где } (j=1...m)$$

Оптимальная по данному критерию стратегия L_0 находится из условия

$$L(i_0)=\max L(i), \text{ где } (i=1...n)$$

КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА G связан с введением числа $0\le\alpha\le1$, называемого «показателем пессимизма-оптимизма». Гипотеза о поведении среды состоит в том, что наихудший вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший - с вероятностью ($1-\alpha$). Тогда оценкой стратегии *i* является число $G(i)=\alpha$. При α=1 данный критерий превращается в критерий крайнего пессимизма (критерий Вальда), а при $\alpha=0$ - в критерий крайнего оптимизма. Содержательная трудность при использовании критерия Гурвица - назначение показателя пессимизма.

КРИТЕРИЙ ВАЛЬДА V (принцип гарантированного результата)основан на гипотезе крайней осторожности (крайнего пессимизма), которая формулируется так: ***«при выборе той или иной стратегии надо рассчитывать на худший из возможных вариантов»***. Если принять эту гипотезу, то оценкой стратегии *i* является число $V(i)=\min a_{ij}$, где $(j=1...m)$

Исходя из этих позиций, 1-й игрок исследует матрицу выигрышей *A* следующим образом: для каждого значения $i(i=\overline{1,m})$ определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий 2-го игрока

$$\min_j a_{ij} \quad (i=1,\ ...,\ m),$$

т. е. определяется минимальный выигрыш для 1-го игрока при условии, что он примет свою *i*-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i=i_0$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т. е. находится следующим образом:

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{\alpha}. \qquad (1)$$

Выбранную с его использованием стратегию называют ***максиминной***, а полученный в результате ее применения выигрыш называют ***максиминным***, или ***нижней ценой игры.***

Число $\underline{\alpha}$, определенное по формуле (1), называется ***нижней чистой ценой игры*** и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе 1-й игрок, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях 2-го игрока.

Если значения функции выигрыша имеют характер потерь (то есть, фактически они являются не выигрышами, а проигрышами), то оценкой стратегии *i* для второго игрока является:

$$\min_j \max_i \; a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \overline{\alpha}. \qquad (2)$$

Число $\overline{\alpha}$, определяемое по формуле *(2)*, называется ***чистой верхней ценой игры*** и показывает, какой максимальный выигрыш первому игроку за счет своих стратегий может гарантированно не допустить 2-й игрок.

Применяя свои чистые стратегии, 1-й игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а 2-й игрок за счет применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш 1-го игрока больше, чем $\overline{\alpha}$.

Максиминные стратегии игроков становятся устойчивыми, пока оба игрока их придерживаются и выигрыш одного из них равен проигрышу другого. Такая игра, где $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, имеет ***седловую точку*** в чистых стратегиях и ***чистую цену***игры: $\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

Седловая точка – это пара чистых стратегий (i_0, j_0) соответственно игроков 1-го и 2-го, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, также соответствующей седловой точке.

Пример 3. Горный курорт предлагает четыре вида экскурсионных троп, начинающихся соответственно от I, II, III и IV уровней канатной дороги. Количество комплектов с провиантом и необходимыми приспособлениями, а также цена на них зависят от высоты, на которой расположены тропы. Причем, решение о продолжении похода и переходе на следующую тропу группа принимает в пути. Исходные данные для составления платежной матрицы игры даны в таблице.

Уровни дороги	***I***	***II***	***III***	***IV***
Комплектов, шт.	3	7	12	17
Цена, руб. за комплект	100	150	200	250

Необходимые турнаборы можно закупить перед походом по цене в 100 руб. за комплект.

Определить оптимальную стратегию в закупке наборов до начала похода, если на фиксированную группу в зависимости от уровня дороги необходимо: A_1 – 3 комплекта, A_2 – 7 комплектов, A_3 – 12 комплектов, A_4 – 17 комплектов.

Решение. Для составления платежной матрицы надо рассчитать затраты на покупку турнаборов в расчете на высотность похода с учетом данных таблицы.

Обозначим высотность маршрутов в соответствии с нумерацией уровней канатной дороги: I – B_1, II – B_2, III – B_3, IV – B_4. Заполняем платежную матрицу.

Стратегии закупки	комплекты	Категории маршрутов			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		I 3	II 7	III 12	IV 17
A_1	3				
A_2	7				
A_3	12				
A_4	17				

1. Для стратегии закупки A_1 рассмотрим четыре случая.

Случай A_1B_1. Затраты составят 300 (руб.).

Случай A_1B_2. При выходе на II маршрут потребуется 7 турнаборов, т. е. придется докупить 4 комплекта (к 3-м приобретенным ранее по цене 100 руб.) уже по 150 руб. за комплект. Тогда затраты составят: $3 \cdot 100 + 4 \cdot 150 = 900$ (руб.).

Случай A_1B_3. На III маршруте к закупленным 3 комплектам по 100 руб. придется докупать на месте 9 комплектов по цене 200 руб. за штуку. Затраты составят: $3 \cdot 100 + 9 \cdot 200 = 2100$ (руб.).

Случай A_1B_4. К закупленным 3-м комплектам по 100 руб. при выходе на IV маршрут необходимо докупить 14 турнаборов по 250 руб. за комплект. Затраты составят: $3 \cdot 100 + 14 \cdot 250 = 4050$ (руб.).

2. Для стратегии закупки турнаборов A_2 рассматриваем 4 случая.

Случай A_2B_1. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб., остатки использовать для пешего возвращения на базу. Затраты составят: $7 \cdot 100 = 700$ (руб.).

Случай A_2B_2. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб. Затраты составят: $7 \cdot 100 = 700$ (руб.).

Случай A_2B_3. К закупленным перед выходом к 7-ми комплектам по 100 руб. за штуку при выходе на III маршрут придется докупить 5 комплектов по 200 руб. за штуку. Затраты составят: $7 \cdot 100 + 5 \cdot 200 = 1700$ (руб.).

Случай A_2B_4. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб. и в случае необходимости докупить 10 турнаборов по цене 250 руб. Затраты составят: $7 \cdot 100 + 10 \cdot 250 = 3200$ (руб.).

3. Для стратегий A_3 и A_4 в закупке турнаборов расчеты аналогичны.

Случай A_3B_1. Закупить наборы из расчета на выход к III маршруту. Затраты составят $12 \cdot 100 = 1200$ (руб.).

Случай A_3B_2. Аналогично. Затраты составят $12 \cdot 100 = 1200$ (руб.).

Случай A_3B_3. Затраты составят $12 \cdot 100 = 1200$ (руб.).

Случай A_3B_4. Закупив 12 комплектов по 100 руб., придется докупить 5 комплектов по 250 руб. за комплект. Затраты составят $12 \cdot 100 + 5 \cdot 250 = 2450$ (руб.).

Случай A_4B_1. Закупить необходимые для IV маршрута наборы до подъема по 100 руб. за комплект. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Случай A_4B_2. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Случай A_4B_3. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Случай A_4B_4. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Платежная матрица составлена.

Стратегии закупки		Категории маршрутов			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		I	II	III	IV
A_1	3	300	900	2100	4050
A_2	7	700	700	1700	3200
A_3	12	1200	1200	1200	2450
A_4	17	1700	1700	1700	1700

Стратегии закупки		Категории маршрутов				minα	maxminα
		B_1	B_2	B_3	B_4		
		I	II	III	IV		
A_1	3	300	900	2100	4050	300	
A_2	7	700	700	1700	3200	700	
A_3	12	1200	1200	1200	2450	1200	
A_4	17	1700	1700	1700	1700	1700	1700
maxβ		1700	1700	2100	4050		
minmax β		1700	1700				

Нижней ценой игры будет являться значение $\alpha = \max$ (300, 700, 1200, 1700) = 1700.

Верхней ценой игры будет являться значение $\beta = \min$ (1700, 1700, 2100, 4050) = 1700.

Следовательно, так как $\alpha = \beta$ игра имеет седловую точку, которая и является решением задачи. Это точка (A_4B_2). Таким образом, наличие седловой точки указывает на то, что следует производить закупку турнаборов в расчете на подъем по IV маршруту. При этом затраты не превысят 1700 рублей.

4.5 Смешанные стратегии в матричных играх

Если партнеры играют только один раз, то игрокам целесообразно придерживаться принципа минимакса, как в игре с седловой точкой, так и в игре без седловой точки. В случае многократного повторения игры с седловой точкой игрокам также целесообразно придерживаться принципа минимакса.

Если же многократно повторяется игра без седловой точки, то постоянное использование минимаксных стратегий становится невыгодным.

Для многократно повторяемых игр без седловой точки вводится следующее определение.

В играх, которые повторяются многократно, каждая из стратегий применяемые игроками называется ***чистой*** стратегией.

Смешанная стратегия игрока – это вероятностная комбинация чистых стратегий, т. е. чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями.

Замечание. Каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии, когда одна из стратегий применяется с вероятностью 1, а все остальные − с вероятностью 0.

Стратегии, входящие с ненулевыми вероятностями в оптимальную стратегию игрока, называются ***активными***.

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: ***оптимальными смешанными стратегиями*** игроков A и B называются такие наборы x^*, y^* соответственно, которые удовлетворяют равенству

$$\min_y \max_x M(A,\ x,\ y) = \max_x \min_y M(A,\ x^*,\ \ y^*).$$

Величина $M\left(A, x^*, y^*\right)$ называется при этом ***ценой игры*** и обозначается через v.

Таким образом, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных параметров решений системы ограничений. Однако это требует большого объема вычислений, которое растет с увеличением числа чистых стратегий игроков. Поэтому в первую очередь следует, по возможности, уменьшить число чистых стратегий игроков.

Отметим, что исключение доминируемых (*не строго*) стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

В 1928 году фон Нейманом была доказана основная теорема теории игр, утверждающая, что каждая игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Поскольку все чистые стратегии являются частными случаями смешанных стратегий, то из основной теоремы теории игр можно получить

Следствие 1. Любая игра имеет цену.

Следствие 2. Цена игры удовлетворяет неравенству $\underline{\alpha} \le \nu \le \overline{\alpha}$.

Следствие 3. Средний выигрыш остается равным цене игры, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок применяет свои активные стратегии с любыми вероятностями.

4.6 Аналитический метод решения игры типа 2 х 2

Рассмотрим игру без седловой точки типа 2 х 2 с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оба игрока имеют только такие оптимальные стратегии, которые используют все свои чистые стратегии с положительными вероятностями. В противном случае один из игроков (например, 1) имеет чистую оптимальную стратегию, а другой - только смешанные.

Найдем оптимальную стратегию игрока *A*. Согласно следствию 3 из основной теоремы теории игр эта стратегия обеспечивает игроку *A* выигрыш, равный цене игры *V*, даже если игрок *B* не выходит за пределы своих активных стратегий. В данной игре обе чистые стратегии игрока *B* являются активными, поскольку в противном случае игра имела бы решение в области чистых стратегий, т.е. была бы игрой с седловой точкой.

Пусть $X = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$ - оптимальная стратегия игрока 1. Отсюда вытекает, что неизвестные p_1, p_2, V удовлетворяют следующей системе из трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = V, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = V, \\ \quad p_1 + \quad p_2 = 1, \end{cases}$$

Решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ p_2 = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ V = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к тому, что оптимальная стратегия игрока 2 - $Y = (\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = V, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = V, \\ \quad q_1 + \quad q_2 = 1, \end{cases}$$

Решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ q_2 = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ V = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases}$$

4.7 Решение игр вида $2 \times n$ и $m \times 2$. Графический метод

У таких игр всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий для каждого из игроков. Если найти эти активные стратегии, то игра $2 \times n$ или $m \times 2$ сводится к игре 2×2, которую мы уже умеем решать. Поэтому игры $2 \times n$ и $m \times 2$ решают обычно графо-аналитическим методом. Рассмотрим решение матричной игры на примере.

Пример 1.

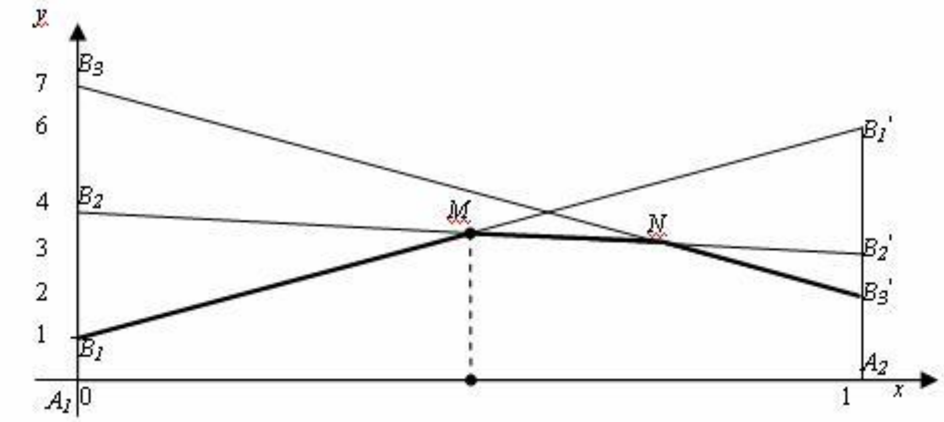
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

				$\underline{\alpha}$
	1 6	4 3	7 2	1 2
$\overline{\alpha}$	6	4	7	2 4

$\underline{\alpha} = 2, \overline{\alpha} = 4$ т.е. $\underline{\alpha} \neq \overline{\alpha}$, поэтому игра не имеет седловой точки, и решение должно быть в смешанных стратегиях.

1. Строим графическое изображение игры.



Если игрок *B* применяет стратегию *B₁*, то выигрыш игрока *A* при применении стратегии A_1 равен $a_{11} = 1$, а при использовании A_2 выигрыш равен

$a_{21} = 6$, поэтому откладываем отрезки $A_1B_1 = 1, A_2B_1^{'} = 6$ на перпендикулярах в A_1 и A_2 и соединяем их отрезком. Аналогично для стратегий B_2 и B_3 строим отрезки $B_2\, B_2^{'}$ и $B_3\, B_3^{'}$.

2. Выделяем нижнюю границу выигрыша $B_1M\ N\ B_3^{'}$ и находим наибольшую ординату этой нижней границы, ординату точки M, которая равна цене игры ν.

3. Определяем пару стратегий, пересекающихся в точке оптимума M.В этой точке пересекаются отрезки $B_2B_2^{'}$ и $B_1B_1^{'}$, соответствующие стратегиям B_1 и B_2 игрока B. Следовательно, стратегию B_3 ему применять невыгодно. Исключаем из матрицы третий столбец и решаем игру 2×2 аналитически:

$$\begin{cases} p_1 + 6p_2 = \nu; \\ 4p_1 + 3p_2 = \nu; \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{aligned} & p_1 + 6p_2 = 4p_1 + 3p_2; \\ & 3p_2 = 3p_1; \\ & p_1 = p_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \qquad \nu = \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 = \dfrac{7}{2}; \\ q_1 + q_2 = 1; \end{cases} \qquad 3q_2 = \frac{5}{2};\ q_2 = \frac{5}{6};\ q_1 = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\gamma = \frac{7}{2};\ P_A = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right);\ Q_B = \left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; 0\right).$

4.8 Приведение матричной антагонистической игры к задачам линейного программирования

Алгоритм поиска решения матричной антагонистической игры, заданной платежной матрицей, имеющей размерность $m \times n$ при больших значениях m и n, сводится к алгоритму симплекс-метода решения пары взаимодвойственных задач линейного программирования. Покажем, как привести конечную матричную антагонистическую игру к двум взаимодвойственных задачам линейного программирования.

Пусть антагонистическая игра задана платёжной матрицей А, имеющей размерность $m \times n$, и эта игра является не вполне определённой. Необходимо найти решение игры, т.е. определить оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков:

$$P^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\right),\ Q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$$

где P^* и Q^* - векторы, компоненты которых p_i^* и p_j^* характеризуют вероятности применения чистых стратегий i и j соответственно первым и вторым игроками и соответственно для них выполняются соотношения:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} q_1^* & q_2^* & \ldots & q_n^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1^* \\ p_2^* \\ . \\ p_m^* \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1,\ q_1^* + q_2^* + \ldots + q_n^* = 1$$

Найдём сначала оптимальную стратегию первого игрока P*. Эта стратегия должна обеспечить выигрыш первому игроку не меньше V, т.е. ≥V, при любом поведении второго игрока, и выигрыш, равный V , при его оптимальном поведении, т.е. при стратегии Q*.

Цена игры V нам пока неизвестна. Без ограничения общности, можно предположить её равной некоторому положительному числу $V > 0$. Действительно, для того, чтобы выполнялось условие $V > 0$, достаточно, чтобы все элементы матрицы A были неотрицательными. Этого всегда можно добиться с помощью аффинных преобразований: прибавляя ко всем элементам матрицы A одну и ту же достаточно большую положительную константу M; при этом цена игры увеличится на M, а решение не изменится. Итак, будем считать $V > 0$. Предположим, что первый игрок A применяет свою оптимальную стратегию P*, а второй игрок B свою чистую стратегию j -ю, тогда средний выигрыш (математическое ожидание) первого игрока A будет равен:

$$a_j = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i^* = a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + \ldots + a_{mj} p_m^*.$$

Оптимальная стратегия первого игрока (A) обладает тем свойством, что при любом поведении второго игрока (B) обеспечивает выигрыш первому игроку, не меньший, чем цена игры V; значит, любое из чисел a_j не может быть меньше V ($\geq V$). Следовательно, при оптимальной стратегии, должна выполняться следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* & + & a_{21}p_2^* & + & \ldots & + & a_{m1}p_m^* & \geq & V, \\ a_{12}p_1^* & + & a_{22}p_2^* & + & \ldots & + & a_{m2}p_m^* & \geq & V, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{1n}p_1^* & + & a_{2n}p_2^* & + & \ldots & + & a_{mn}p_m^* & \geq & V. \end{cases} \qquad (1)$$

Разделим неравенства (1) на положительную величину V (правые части системы (1)) и введём обозначения:

$$y_1 = \frac{p_1^*}{V}, y_2 = \frac{p_2^*}{V}, \ldots, y_m = \frac{p_m^*}{V} \qquad (2)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0, \qquad (3)$$

Тогда условия (1) запишутся в виде:

$$\begin{cases} a_{11}V_1 & + & a_{21}V_2 & + & \ldots & + & a_{m1}V_m & \geq & 1, \\ a_{12}V_1 & + & a_{22}V_2 & + & \ldots & + & a_{m2}V_m & \geq & 1, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{1n}V_1 & + & a_{2n}V_2 & + & \ldots & + & a_{mn}V_m & \geq & 1. \end{cases} \qquad (4)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_m$ - неотрицательные переменные. В силу (2) и того, что $p_1{}^* + p_2{}^* + \ldots + p_m{}^* = 1$ переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ удовлетворяют условию, которое обозначим через F:

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \frac{1}{V} \qquad (5)$$

Поскольку первый игрок свой гарантированный выигрыш старается сделать максимально возможным, очевидно, при этом правая часть (5) $\frac{1}{V} \to V$ - принимает минимальное значение.

Таким образом, задача решения антагонистической игры для первого игрока свелась к следующей математической задаче: определить неотрицательные значения переменных $y_1, y_2, ..., y_m$, чтобы они удовлетворяли системе функциональных линейных ограничений в виде неравенств, системе общих ограничений и минимизировали целевую функцию F:

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min$$

Это типичная задача линейного программирования (двойственная) и она может быть решена симплекс - методом. Таким образом, решая задачу линейного программирования, мы можем найти оптимальную стратегию $P^* = \left(p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*\right)$ игрока А.

Найдём теперь оптимальную стратегию $Q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ игрока В. Всё будет аналогично решению игры для игрока А, с той разницей, что игрок В стремиться не максимизировать, а минимизировать выигрыш (по сути дела его проигрыш), а значит, не минимизировать, а максимизировать величину $\frac{1}{V}$, т.к. $V \to \min$. Вместо условий (4) должны выполняться условия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le 1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le 1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1. \end{cases} \qquad (6)$$

где $x_1 = \frac{q_1^*}{V}, x_2 = \frac{q_2^*}{V}, ..., x_n = \frac{q_n^*}{V},$ (7)

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \qquad (8)$$

Требуется так выбрать переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, чтобы они удовлетворяли условиям (6), (8) и обращали в максимум линейную функцию цели F': $F' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{V} \to \max$

Таким образом, задача решения антагонистической игры для второго игрока свелась к следующей математической задаче: определить неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, чтобы они удовлетворяли системе функциональных линейных ограничений в виде неравенств (6), системе общих ограничений (8) и максимизировать целевую функцию F':

$$F' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{V} \to \min$$

Это типичная задача линейного программирования (прямая) и она может быть решена симплекс - методом. Таким образом, решая прямую задачу линейного программирования, мы можем найти оптимальную стратегию $Q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ игрока В. Подведём итог.

Задача второго игрока **минимизация проигрыша V**	**Задача первого игрока** **максимизация выигрыша V**
Целевая функция	
$F' = x_1 + x_2 + ... + x_n = \dfrac{1}{V} \to \max$	$F' = y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_m = \dfrac{1}{V} \to \min$
Функциональные ограничения	
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le 1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le 1$ . . . . $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le 1$	$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge 1$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge 1$ . . . . . . $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge 1$
Общие (прямые) ограничения	
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$	$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, ..., y_m \ge 0$

Задачи обоих игроков образуют пару симметричных взаимо двойственных задач линейного программирования, и, поэтому нет необходимости решать обе эти задачи, т.к. найдя решение одной из них, можно найти и решение другой.

Пример 1. Решить игру с матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,5 \\ 0,6 & 0,1 & -0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. В соответствии с алгоритмом определим, существуют ли в ней доминируемые стратегии, чтобы исключить их. Доминируемых стратегий нет.
2. Поскольку матрица содержит отрицательные числа, то нужно добиться, чтобы все её элементы были неотрицательны, прибавив ко всем её элементам число, равное модулю наименьшего числа матрицы. Минимальный элемент матрицы равен -0,1, его модуль равен 0,1. Прибавим ко всем элементам платёжной матрицы число, равное 0,1, в результате получим:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Умножим все элементы полученной матрицы на 10, чтобы удобнее проводить последующие вычисления.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Проведённые аффинные преобразования на оптимальных стратегиях не скажутся, а цену игры мы восстановим, сделав обратные преобразования (разделим полученную сумму на 10 и отнимем 0,1).

Припишем строкам вероятности p_1, p_2, p_3.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда среднее значение (математическое ожидание) выигрыша игрока А при применении игроком В своей первой стратегии равен: $1\cdot p_1 + 7\cdot p_2 + 5\cdot p_3$ (первый столбец поэлементно умножаем на вероятности p_1, p_2, p_3 и полученные произведения суммируем).

Этот выигрыш не может быть меньше гарантированной цены игры V: $1\cdot p_1 + 7\cdot p_2 + 5\cdot p_3 \geq V$. Аналогично для других стратегий игрока В.

$$\begin{cases} p_1 + 7\cdot p_2 + 5\cdot p_3 \geq V, \\ 4\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3\cdot p_3 \geq V, \\ 6\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + p_3 \geq V, \\ p_i \geq 0,\ \ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенства на V и введём обозначения $y_i = \dfrac{p_i}{V}$ $(i = 1,2,3.)$:

$$\begin{cases} y_1 + 7\cdot y_2 + 5\cdot y_3 \geq 1, \\ 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 3\cdot y_3 \geq 1, \\ 6\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + y_3 \geq 1, \\ y_i \geq 0,\ \ i = 1,2,3. \end{cases}$$

$$F = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)}{V} = \frac{1}{V}$$

Игрок А стремиться повысить цену игры ($V \to \max$). Поэтому $F \to \min$

.

Получили задачу линейного программирования: $F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 + 7\cdot y_2 + 5\cdot y_3 \geq 1, \\ 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 3\cdot y_3 \geq 1, \\ 6\cdot y_1 + 2\cdot y_3 \geq 1, \\ y_i \geq 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

Аналогично припишем столбцам вероятности q_1, q_2, q_3

$$\begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда средний проигрыш игрока В при применении игроком А его первой стратегии равен: $1\cdot q_1 + 4\cdot q_2 + 6\cdot q_3$ (первую строку поэлементно умножаем на вероятности q_1, q_2, q_3 и полученные произведения суммируем).

Этот проигрыш не может быть больше цены игры V: $1\cdot q_1 + 4\cdot q_2 + 6\cdot q_3 \leq V$. Аналогично для других стратегий игрока А.

$$\begin{cases} q_1 + 4\cdot q_2 + 6\cdot q_3 \leq V, \\ 7\cdot q_1 + 2\cdot q_2 + 0\cdot q_3 \leq V, \\ 5\cdot q_1 + 3\cdot q_2 + 2\cdot q_3 \leq V, \\ q_i \geq 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенств на V и введём обозначения $x_i = \dfrac{q_i}{V} \quad (i = 1,2,3)$

$$\begin{cases} x_1 + 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 \leq 1, \\ 7\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \leq 1, \\ 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \leq 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases} \qquad F' = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{(q_1 + q_2 + q_3)}{V} = \frac{1}{V}$$

Игрок В стремится понизить цену игры ($V \to \min$), поэтому $F' \to \max$. Получили задачу линейного программирования: $F' = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$.

$$\begin{cases} x_1 + 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 \leq 1, \\ 7\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \leq 1, \\ 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \leq 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

Полученные задачи являются взаимно двойственными задачами линейного программирования. Решим любую из них симплекс-методом. Окончательный результат - таблица имеет следующий вид:

y_1	$\frac{3}{28}$		$p_1 =$	$\frac{3}{8}$
y_2	0		$p_2 =$	0
y_3	$\frac{5}{28}$		$p_3 =$	$\frac{5}{8}$
F'	$\frac{2}{7}$		$V =$	$3 \cdot \frac{1}{2}$
x_1	$\frac{1}{7}$		$q_1 =$	$\frac{1}{2}$
x_2	0		$q_2 =$	0
x_3	$\frac{1}{7}$		$q_3 =$	$\frac{1}{2}$
F	$\frac{2}{7}$		$V=$	$3 \cdot \frac{1}{2}$

Итак, оптимальные стратегии: $P^* = \left(\frac{3}{8}; 0; \frac{5}{8}\right)$, $Q^* = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$,

цена игры: для модифицированной задачи V= 3,5 ,а для исходной задачи $V' = \frac{3,5}{10 - 0,1} = 0,25.$