Исследование операций — научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

Управление любой системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает определить условия, необходимые и достаточные для осуществления данного процесса. Для этого все параметры, характеризующие процесс и внешние условия, должны быть количественно определены, измерены. Следовательно, цель исследования операций — *количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.*

При решении конкретной задачи управления применение методов исследования операций предполагает:

- построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;
- изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

28. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математической моделью экономической задачи называется совокупность математических соотношений, описывающих рассматриваемый экономический процесс.

Для составления математической модели необходимо: 1) выбрать переменные задачи; 2) составить систему ограничений; 3) задать целевую функцию.

Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс. Их обычно записывают в виде вектора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Системой ограничений задачи называется совокупность уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических условий, например условия положительности переменных. В общем случае они имеют вид

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \ldots, l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant (\geqslant)\, 0, & i = l+1, l+2, \ldots, m. \end{cases}$$

Целевой функцией называют функцию $Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.

Общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти переменные задачи $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые обеспечивают экстремум целевой функции

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\ (\min) \qquad (28.1)$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \ldots, l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant (\geqslant)\, 0, & i = l+1, l+2, \ldots, m. \end{cases} \qquad (28.2)$$

Если целевая функция (28.1) и система ограничений (28.2) линейны, то задача математического программирования называется *задачей линейного программирования.*

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности. Множество допустимых решений задачи образует *область допустимых решений.*

Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

28.1. Примеры составления математических моделей экономических задач

28.1 (задача использования ресурсов). При производстве n видов продукции используется m видов ресурсов. Известно: $b_1, b_2, \dots, b_m$ — запасы ресурсов; a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ — расход каждого i-го вида ресурса на изготовление единицы j-й продукции; c_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ — прибыль, получаемая при реализации единицы j-й продукции. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Решение. Обозначим вектор переменных задачи $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ — объем выпуска j-й продукции. Учитывая, что c_jx_j — прибыль от реализации всего объема j-й продукции, $a_{ij}x_j$ — затраты i-го вида ресурса на весь объем выпуска j-й продукции, запишем математическую модель задачи. Кроме того, необходимо учитывать неотрицательность переменных задачи, так как объем выпуска продукции не может быть отрицательным. Таким образом, математическая модель имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

28.2 (задача о составлении рациона питания). Животные должны получать ежедневно m питательных веществ в количестве не менее $b_1, b_2, \dots, b_m$. В рацион животных входят корма n видов. Известно: a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ — содержание i-го питательного вещества в единице j-го вида корма; c_j $(j = 1, 2, ..., n)$ — стоимость единицы j-го вида корма. Составить суточный рацион кормления животных, обеспечивающий минимальные затраты.

Р е ш е н и е. Введем переменные задачи $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ — объем j-го вида корма, входящего в суточный рацион. Так как $a_{ij}x_j$ — количество i-го питательного вещества, содержащегося в j-м виде корма, входящего в суточный рацион, c_jx_j — стоимость j-го корма, то математическая модель имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geqslant b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

28.2. Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме

Каноническая задача линейного программирования имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to (\max)\min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Она отличается от других задач тем, что ее система ограничений является системой уравнений и все переменные неотрицательные.

При необходимости перехода от неравенства к уравнению вводят дополнительные переменные. Неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i$ заменяется уравнением $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$ и условием неотрицательности дополнительной переменной $x_{n+1} \geqslant 0$, а неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i$ — уравнением $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$ и условием неотрицательности $x_{n+1} \geqslant 0$. Дополнительные переменные вводят в целевую функцию с коэффициентом, равным нулю.

Любая переменная x_j, на которую не наложено условие неотрицательности, заменяется разностью двух других неотрицательных переменных $x_j = x_j' - x_j''$, $x_j' \geqslant 0$, $x_j'' \geqslant 0$.

В канонической задаче целевая функция может как минимизироваться, так и максимизироваться. Для того чтобы перейти от нахождения максимума к нахождению минимума или наоборот, достаточно изменить знаки коэффициентов целевой функции. Полученная в результате этого задача и исходная задача имеют одно и то же оптимальное решение, а значения целевых функций на этом решении отличаются только знаком.

При решении некоторых задач возникает необходимость перехода от канонической задачи к *симметричной*, которая в матричной записи имеет вид

$$Z(X) = CX \to \max,$$
$$AX \leqslant A_0, \quad X \geqslant \theta$$

или

$$Z(X) = CX \to \min,$$
$$AX \geqslant A_0, \quad X \geqslant \theta,$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

28.5. Привести к каноническому виду задачу линейного программирования

$$Z(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 5, \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \text{Д} \\ \\ +x_4 \\ -x_5 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Перейдем к задаче на отыскание максимума целевой функции. Для этого изменим знаки коэффициентов целевой функции. В целях превращения в уравнения второго и третьего неравенств системы ограничений введем неотрицательные дополнительные переменные x_4, x_5 (на математической модели эта операция отмечена буквой Д). Переменная x_4 вводится в левую часть второго неравенства со знаком «+», так как неравенство имеет вид «$\leqslant$». Переменная x_5 вводится в левую часть третьего неравенства со знаком «−», так как неравенство имеет вид «$\geqslant$». В целевую функцию переменные x_4, x_5 вводятся с коэффициентом, равным нулю. Переменную x_1, на которую не наложено условие неотрицательности, заменяем разностью $x_1 = x_1' - x_1''$, $x_1' \geqslant 0$, $x_1'' \geqslant 0$. Записываем задачу в каноническом виде:

$$Z(X) = -3x_1' + 3x_1'' - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1' - x_1'' + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1' - x_1'' - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1' - 2x_1'' + x_2 + 2x_3 - x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_1' \geqslant 0, \quad x_1'' \geqslant 0, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 2, 3, 4, 5.$$

28.6. Привести к симметричному виду задачу линейного программирования

$$Z(X) = 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6, \\ -7x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Методом Жордана—Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной разрешенной. Одновременно разрешенные неизвестные исключим из целевой функции. Для этого в таблице решения задачи (табл. 28.1) наряду с коэффициентами уравнений системы ограничений в дополнительной строке запишем коэффициенты целевой функции. В последнем столбце дополнительной строки (на месте правой части уравнения) запишем свободный член целевой функции, равный нулю. При вычислениях учитываем, что разрешающий элемент в последней строке (в целевой функции) выбирать нельзя.

Т а б л и ц а 28.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	3	−2	$\boxed{1}$	4	6	×(−3) ×(−1)
	−7	10	3	−4	2	
Целевая функция	4	−5	1	2	0	
	3	−2	1	4	6	
	−16	16	0	−16	−16	$\times {}^1/_{16}$
	1	−3	0	−2	−6	
	3	−2	1	4	6	
	−1	$\boxed{1}$	0	−1	−1	×2 ×3
	1	−3	0	−2	−6	
	1	0	1	2	4	
	−1	1	0	−1	−1	
	−2	0	0	−5	−9	

Число −9, полученное в последнем столбце последней строки таблицы, необходимо записать в целевую функцию с противоположным знаком. В результате данных преобразований задача принимает следующий вид:

$$Z(X) = -2x_1 \qquad - 5x_4 + 9 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 = \ \ 4, \\ -x_1 + x_2 \qquad - \ \ x_4 = -1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Так как переменные x_2, x_3 неотрицательные, отбросив их, можно записать задачу в симметричном виде

$$Z(X) = -2x_1 - 5x_4 + 9 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 \leqslant \ \ 4, \\ -x_1 - \ \ x_4 \leqslant -1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 4.$$

29. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

29.1. Графический метод решения задач линейного программирования с двумя переменными

Графический метод используется для решения задач с двумя переменными следующего вида:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\ (\min), \tag{29.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant (\geqslant)\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant (\geqslant)\ b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant (\geqslant)\ b_m, \end{cases} \tag{29.2}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{29.3}$$

Данный метод основывается на возможности графического изображения области допустимых решений задачи и нахождении среди них оптимального решения.

Область допустимых решений задачи строится как пересечение (общая часть) областей решений каждого из заданных ограничений (29.2), (29.3).

Областью решений линейного неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i$ является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$, соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость.

Для того чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство: если оно удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку, если же неравенство не удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.

Областью допустимых решений задачи является общая часть полуплоскостей — областей решений всех неравенств системы ограничений.

Для нахождения среди допустимых решений оптимального решения используют линии уровня и опорные прямые.

Линией уровня называется прямая, на которой целевая функция задачи принимает постоянное значение. Уравнение линии уровня в общем случае имеет вид $c_1x_1 + c_2x_2 = l$, где $l = \text{const}$. Все линии уровня параллельны между собой. Их нормаль $\bar{n} = (c_1, c_2)$.

Опорной прямой называется линия уровня, которая имеет хотя бы одну общую точку с областью допустимых решений и по отношению к которой эта область находится в одной из полуплоскостей.

Область допустимых решений любой задачи имеет не более двух опорных прямых, на одной из которых может находиться оптимальное решение (рис. 29.1).

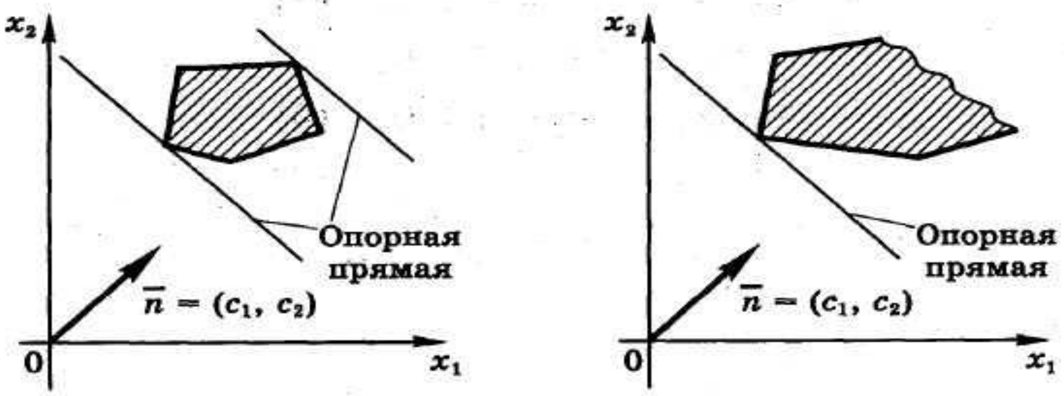

Рис. 29.1

Значения целевой функции на линиях уровня возрастают, если линии уровня перемещать в направлении их нормали, и убывают при перемещении линий уровня в противоположном направлении.

Алгоритм графического метода решения задач линейного программирования с двумя переменными:

1. Построить область допустимых решений.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

3. Если область допустимых решений является непустым множеством, построить нормаль линий уровня $\overline{n} = (c_1, c_2)$ и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью.

4. Линию уровня переместить до опорной прямой в задаче на максимум в направлении нормали, в задаче на минимум — в противоположном направлении.

5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений в направлении, соответствующем приближению к экстремуму целевой функции, линия уровня уходит в бесконечность, то задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.

6. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то для его нахождения решить совместно уравнения прямых, ограничивающих область допустимых решений и имеющих общие точки с соответствующей опорной прямой. Если целевая функция задачи достигает экстремума в двух угловых точках, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением является любая выпуклая линейная комбинация этих точек. После нахождения оптимальных решений вычислить значение целевой функции на этих решениях.

29.1. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \geqslant 0, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \leqslant 0, & (2) \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geqslant 0, & (3) \\ x_2 \leqslant 3, & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Строим область допустимых решений задачи. Нумеруем ограничения задачи. В прямоугольной декартовой системе координат (рис. 29.2) строим прямую $x_1 - x_2 + 2 = 0$ (L_1), соответствующую ограничению (1). Находим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (1). Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство. Так как прямая L_1 не проходит через начало координат, подставляем координаты точки O (0, 0) в первое ограничение $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \geqslant 0$. Получаем строгое неравенство $2 > 0$. Следовательно, точка O лежит в полуплоскости решений. Таким образом, стрелки на концах прямой L_1 должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку O. Аналогично строим прямые $3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$ (L_2), $2x_1 + x_2 - 2 = 0$ (L_3), $x_2 = 3$ (L_4) и области решений ограничений (2), (3) и (4). Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности; полученную область допустимых решений отметим на рис. 29.2 штриховкой.

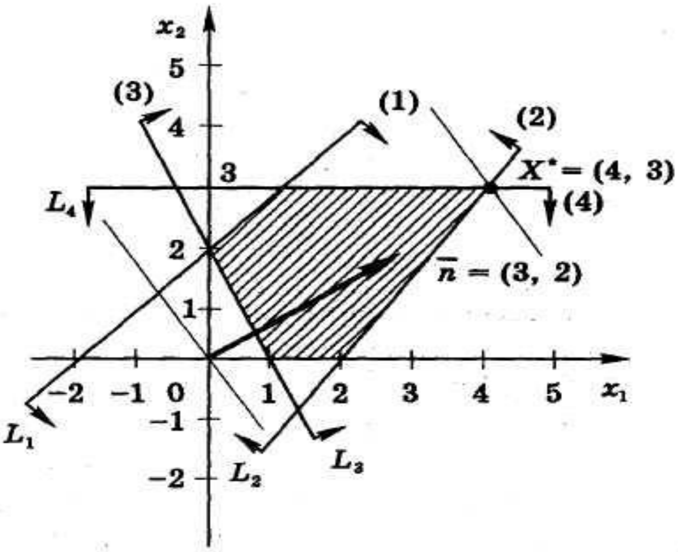

Рис. 29.2

Строим нормаль линий уровня $\overline{n} = (3, 2)$ и одну из этих линий, например $3x_1 + 2x_2 = 0$. Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня перемещаем в направлении нормали до опорной прямой. Эта прямая проходит через точку X^* пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (2) и (4). Определяем координаты точки $X^* = L_2 \cap L_4$. Решая систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases}$ получаем $X^* = (4, 3)$. Вычисляем $Z(X^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$.

Ответ: $\max Z(X) = 18$ при $X^* = (4, 3)$.