29.2. Графический метод решения задач линейного программирования с n переменными

Графическим методом решаются задачи линейного программирования, записанные в каноническом виде и удовлетворяющие условию $n - r \leqslant 2$, где n — число неизвестных системы ограничений; r — ранг системы векторов условий. Если уравнения системы ограничений линейно независимы, то ранг r равен числу уравнений системы m.

29.5. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 - 4x_5 = -4. \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Р е ш е н и е. Метод применим, так как $n - r = 5 - 3 = 2$.

Методом Жордана—Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной разрешенной (табл. 29.1). Одновременно исключим разрешенные неизвестные из целевой функции.

Таблица 29.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
−1	$\boxed{1}$	1	2	−3	4	Система уравнений-ограничений
1	1	4	1	−8	3	
0	1	1	0	−4	−4	
−1	−1	1	3	7	0	Целевая функция
−1	1	1	2	−3	4	
2	0	3	−1	−5	−1	
$\boxed{1}$	0	0	−2	−1	−8	
−2	0	2	5	4	4	
0	1	1	0	−4	−4	
0	0	$\boxed{3}$	3	−3	15	
1	0	0	−2	−1	−8	
0	0	2	1	2	−12	
0	1	0	−1	−3	−9	
0	0	1	1	−1	5	
1	0	0	−2	−1	−8	
0	0	0	−1	4	−22	

Используя последнюю часть табл. 29.1, запишем задачу линейного программирования в преобразованном виде:

$$Z(X) = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Отбросим в уравнениях-ограничениях неотрицательные разрешенные неизвестные x_1, x_2, x_3 и заменим знак равенства знаками неравенства «$\leqslant$», получим вспомогательную задачу линейного программирования с двумя переменными

$$Z(X) = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_4 - 3x_5 \leqslant -9, & (1) \\ x_4 - x_5 \leqslant 5, & (2) \\ -2x_4 - x_5 \leqslant -8, & (3) \end{cases}$$

$$x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0.$$

Решаем задачу графическим методом (рис. 29.6). Свободный член в целевой функции 22 на отыскание оптимального решения не влияет и учитывается только при вычислении значения целевой функции.

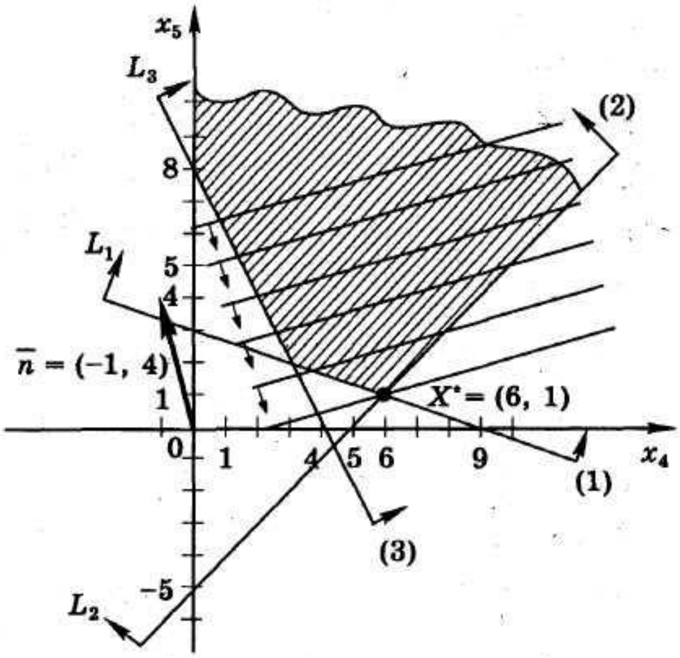

Рис. 29.6

Находим оптимальное решение вспомогательной задачи $X^* = L_1 \cap L_2$:

$$+\begin{cases} -x_4 - 3x_5 = -9, & (L_1) \\ x_4 - x_5 = 5 & (L_2) \end{cases}$$

$$-4x_5 = -4;$$

$$x_5^* = 1, \quad x_4^* = 6;$$

$$X^* = (6, 1).$$

Вычисляем минимальное значение целевой функции $Z(X^*) = -1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 22 = 20$.

Находим оптимальное решение исходной задачи. Для этого используем систему ограничений в разрешенном виде:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8. \end{cases}$$

Вычисляем x_2^*, x_3^* и x_1^*: $x_2^* = -9 + x_4^* + 3x_5^* = -9 + 6 + 3 \cdot 1 = 0$,
$x_3^* = 5 - x_4^* + x_5^* = 5 - 6 + 1 = 0$, $x_1^* = -8 + 2x_4^* + x_5^* = -8 + 2 \cdot 6 + 1 = 5$.
Получаем $X^* = (5, 0, 0, 6, 1)$.

Ответ: $\min Z(X) = 20$ при $X^* = (5, 0, 0, 6, 1)$.

30. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплексный метод основывается на следующем:

- область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек, т.е. многогранником или многоугольным множеством;
- оптимальным решением задачи линейного программирования является одна из угловых точек области допустимых решений;
- угловые точки области допустимых решений алгебраически представляют некоторые базисные (опорные) решения системы ограничений задачи.

Данный метод состоит в целенаправленном переборе опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов расчета либо найти оптимальное решение, либо установить его отсутствие.

Основное содержание симплексного метода:

1) найти начальное опорное решение;

2) осуществить переход от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному;

3) определить критерии завершения процесса решения задачи, позволяющие своевременно прекратить перебор решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии решения.

30.1. Опорное решение задачи линейного программирования

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min), \tag{30.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{30.2}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j, \quad b_i \geqslant 0 \quad \forall i. \tag{30.3}$$

Будем считать, что правые части всех уравнений системы ограничений неотрицательны. Если в каком-либо уравнении правая часть отрицательна, то это уравнение нужно умножить на -1.

Опорным решением задачи линейного программирования называется такое допустимое решение $X = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}, 0, \ldots, 0)$, для которого векторы условий (столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений) $A_1, A_2, \ldots, A_m$, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Число отличных от нуля координат опорного решения не может быть больше ранга r системы векторов условий (числа линейно независимых уравнений системы ограничений). В дальнейшем будем считать, что система ограничений состоит из линейно независимых уравнений, т. е. $r = m$.

Если число отличных от нуля координат опорного решения равно m, то решение называется *невырожденным*, в противном случае (меньше m) — *вырожденным*.

Базисом опорного решения называется базис системы векторов условий задачи, включающий в свой состав векторы, соответствующие отличным от нуля координатам опорного решения.

Базисное решение находится методом Жордана — Гаусса. При этом разрешающие элементы для преобразований Жордана необходимо выбирать из условия, обеспечивающего неотрицательность правых частей уравнений системы,

$$\theta_{0k} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \text{ при } a_{ik} > 0. \tag{30.4}$$

Здесь k — номер вектора условия A_k, вводимого в базис (номер выбираемого столбца матрицы системы ограничений), а l — номер вектора A_l, выводимого из базиса (номер строки матрицы системы, в которой следует выбирать разрешающий элемент для преобразования Жордана).

С помощью данного условия можно выбрать разрешающий элемент в любом столбце k матрицы системы ограничений, в котором имеется хотя бы один положительный элемент. Если при выборе разрешающего элемента данное условие нарушается, в правой части системы уравнений появляются отрицательные величины.

Используя данное условие, можно получить допустимое базисное решение, которое является начальным опорным решением.

Аналогичное условие используется при переходе от одного опорного решения к другому.

30.1. Найти начальное опорное решение и путем перебора опорных решений определить оптимальное решение задачи линейного программирования

$$Z(X) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Результаты нахождения начального опорного решения и дальнейшего перебора опорных решений приведены в табл. 30.1. В правой части таблицы на каждом шаге вычислений приведены значения параметра θ_k для различных столбцов k (минимальные значения θ_{0k} выделены жирным шрифтом), соответствующее опорное решение X_i и значение целевой функции $Z(X_i)$ на этом решении. Номера столбцов для выбора разрешающих элементов принимались произвольно.

Таблица 30.1

x_1	x_2	x_3	x_4	b	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	
3	2	$\boxed{1}$	1	7	$7/3$	$7/2$	**7**	7	
5	3	1	2	11	$11/5$	$11/3$	11	$11/2$	Нахождение начального опорного решения
3	2	1	1	7	$7/3$	$7/2$		7	
2	1	0	$\boxed{1}$	4	**2**	4		**4**	
1	$\boxed{1}$	1	0	3	3	**3**			$X_1 = (0, 0, 3, 4)$,
2	1	0	1	4	**2**	4			$Б_1 = (A_3, A_4)$, $Z(X_1) = -1$;
1	1	1	0	3	3		**3**		$X_2 = (0, 3, 0, 1)$,
$\boxed{1}$	0	−1	1	1	**1**		—		$Б_2 = (A_2, A_4)$, $Z(X_2) = 5$;
0	1	$\boxed{2}$	−1	2			**1**	—	$X_3 = (1, 2, 0, 0)$,
1	0	−1	1	1			—	**1**	$Б_3 = (A_1, A_2)$, $Z(X_3) = 7$;
0	$1/2$	1	$-1/2$	1					$X_4 = (2, 0, 1, 0)$,
1	$1/2$	0	$1/2$	2					$Б_4 = (A_1, A_3)$, $Z(X_4) = 7$.

Сравниваем значения целевой функции на полученных опорных решениях: $\min\{-1, 5, 7, 7\} = -1$. Делаем вывод, что оптимальным решением является $X_1 = (0, 0, 3, 4)$.

Ответ: $\min Z(X) = -1$ при $X^* = (0, 0, 3, 4)$.

30.2. Алгоритм симплексного метода

Оптимальное решение задачи линейного программирования можно найти путем перебора не всех, а только части опорных решений. Для этого необходимо каждое опорное решение проверять на оптимальность и переход от одного опорного решения к другому осуществлять таким образом, чтобы значение целевой функции увеличивалось в задаче на максимум или уменьшалось в задаче на минимум.

При переходе от одного опорного решения X_1 к другому X_2 приращение целевой функции находится по формуле

$$\Delta Z_k = Z(X_2) - Z(X_1) = -\theta_{0k}\Delta_k, \tag{30.5}$$

т.е.

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \theta_{0k}\Delta_k. \tag{30.6}$$

Здесь k — номер вектора, вводимого в базис опорного решения; Δ_k — оценка разложения вектора условий A_k по базису опорного решения, вычисляемая по формуле

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik} - c_k, \tag{30.7}$$

или в векторной записи

$$\Delta_k = C_б X_k - c_k, \tag{30.8}$$

где $C_б = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{mk})$ — вектор коэффициентов разложения вектора A_k по базису опорного решения; c_k —коэффициент целевой функции при переменной x_k.

Если в задаче линейного программирования на максимум (минимум) хотя бы для одного вектора условий оценка разложения по базису невырожденного опорного решения отрицательная (положительная), то опорное решение может быть улучшено, т.е. можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше (меньше).

Чтобы обеспечить наибольшее изменение целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому, векторы, выводимый из базиса и вводимый в базис опорного решения, необходимо выбирать, исходя из условий:

- в задаче на максимум $\max\limits_k \{\Delta Z_k\} = \max\limits_k \{-\theta_{0k}\Delta_k\}$; (30.9)
- в задаче на минимум $\min\limits_k \{\Delta Z_k\} = \min\limits_k \{-\theta_{0k}\Delta_k\}$. (30.10)

В упрощенном варианте вектор, вводимый в базис, можно выбрать, исходя из условий:

- в задаче на максимум $\min\limits_k \{\Delta_k\}$; (30.11)
- в задаче на минимум $\max\limits_k \{\Delta_k\}$. (30.12)

Опорное решение задачи линейного программирования на максимум (минимум) является **оптимальным**, если для любого вектора условий оценка разложения по базису опорного решения неотрицательная (неположительная), т.е.:

- в задаче на максимум $\Delta_k \geqslant 0 \quad \forall k$; (30.13)
- в задаче на минимум $\Delta_k \leqslant 0 \quad \forall k$. (30.14)

Оптимальное решение задачи линейного программирования является **единственным**, если для любого вектора условий, не входящего в базис, оценка отлична от нуля, т.е.

$$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}. \tag{30.15}$$

Здесь предполагается, что в базис оптимального решения входят первые m векторов.

Задача линейного программирования имеет **бесконечное множество** оптимальных решений, если при оптимальном решении оценка хотя бы одного вектора условия, не входящего в базис, равна нулю, т.е.

$$\exists\, k \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}: \Delta_k = 0. \tag{30.16}$$

Задача линейного программирования не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, если для какого-либо из векторов условий A_k с оценкой Δ_k, противоречащей признаку оптимальности, среди коэффициентов разложения по базису опорного решения нет положительного, т.е.:

- в задаче на максимум $\exists A_k$: $\Delta_k < 0$ и $x_{ik} \leqslant 0 \quad \forall i$; (30.17)
- в задаче на минимум $\exists A_k$: $\Delta_k > 0$ и $x_{ik} \leqslant 0 \quad \forall i$. (30.18)

Алгоритм решения задачи симплексным методом:

1. Привести задачу линейного программирования к каноническому виду.

2. Найти начальное опорное решение с базисом из единичных векторов и коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения. Если опорное решение отсутствует, задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

3. Вычислить оценки разложений векторов условий по базису опорного решения и заполнить симплексную таблицу.

4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается.

5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора найти все оптимальные решения.

6. Если имеют место условия неограниченности целевой функции, то задача не имеет решения.

7. Если пункты 4—6 алгоритма не выполняются, найти новое опорное решение и перейти к пункту 3.

30.10. Решить симплексным методом

$$Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{array}{l|l}
 & \text{Д} \\
\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10, \end{array}\right. & \begin{array}{l} \\ +x_5 \\ +x_6 \end{array}
\end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Приводим задачу к каноническому виду. Для этого в левую часть второго и третьего ограничений-неравенств типа «$\leqslant$» вводим дополнительные переменные x_5 и x_6 с коэффициентом +1. В целевую функцию x_5 и x_6 входят с коэффициентом 0 (т.е. не входят). Получаем

$$Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 10, \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Система ограничений этой задачи является системой уравнений, разрешенной относительно переменных x_4, x_5, x_6. Свободные (неразрешенные) переменные приравниваем к нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Получаем $x_4 = 6$, $x_5 = x_6 = 10$. Записываем базисное решение $X_1 = (0, 0, 0, 6, 10, 10)$, которое является начальным опорным решением с базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$.

По формуле (30.8) вычисляем оценки разложений векторов условий по базису опорного решения:

$\Delta_1 = C_б X_1 - c_1 = (-1, 0, 0) \cdot (1, 1, 2) - 1 = -1 + 0 + 0 - 1 = -2;$

$\Delta_2 = C_б X_2 - c_2 = (-1, 0, 0) \cdot (1, 2, 1) - 1 = -1 + 0 + 0 - 1 = -2;$

$\Delta_3 = C_б X_3 - c_3 = (-1, 0, 0) \cdot (2, 1, 1) - 1 = -2 + 0 + 0 - 1 = -3;$

$\Delta_4 = C_б X_4 - c_4 = (-1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) - (-1) = -1 + 0 + 0 + 1 = 0;$

$\Delta_5 = C_б X_5 - c_5 = (-1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) - 0 = 0 + 0 + 0 - 0 = 0;$

$\Delta_6 = C_б X_6 - c_6 = (-1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) - 0 = 0 + 0 + 0 - 0 = 0.$

Опорное решение, коэффициенты разложений и оценки разложений векторов условий по базису опорного решения записываются в симплексную таблицу (табл. 30.2).

Таблица 30.2

				1↓	1	1	−1	0	0			
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_2	θ_3
	A_4	−1	6	1	1	2	1	0	0	6	6	**3**
	A_5	0	10	1	2	1	0	1	0	10	**5**	10
←	A_6	0	10	$\boxed{2}$	1	1	0	0	1	**5**	10	10
	Δ_k		−6	−2	−2	−3	0	0	0			

Для удобства вычислений оценок над таблицей записываются коэффициенты целевой функции. В первом столбце «$Б$» записываются векторы, входящие в базис опорного решения. Порядок записи этих векторов соответствует номерам разрешенных неизвестных в уравнениях-ограничениях. Во втором столбце таблицы «$C_б$» записываются коэффициенты целевой функции при базисных переменных в том же порядке. При правильном расположении коэффициентов целевой функции в столбце «$C_б$» оценки единичных векторов, входящих в базис, всегда равны нулю. В последней строке таблицы с оценками Δ_k в столбце «A_0» записывается значение целевой функции на опорном решении $Z(X_1)$.

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в рассматриваемой задаче на максимум векторам A_1, A_2 и A_3 соответствуют отрицательные оценки $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_3 = -3$ (не выполняется признак оптимальности).

В данном случае можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше. Определим, введение какого из трех векторов приведет к большему приращению целевой функции. Приращение целевой функции находится по формуле (30.5). Вычисляем значения параметра θ_{0k} для первого, второго и третьего векторов по формуле (30.4). Получаем $\theta_{01} = 5$ при $l = 3$; $\theta_{02} = 5$ при $l = 2$; $\theta_{03} = 3$ при $l = 1$ (см. табл. 30.2). Находим возможные приращения целевой функции при введении в базис каждого из этих векторов и определяем наибольшее из них:

$$\max_k \Delta Z_k = \max_k \{-5 \cdot (-2), -5 \cdot (-2), -3 \cdot (-3)\} = \max_k \{10, 10, 9\} = 10 \text{ при } k \in \{1; 2\}.$$

Следовательно, для более быстрого приближения к оптимальному решению необходимо ввести в базис опорного решения либо вектор A_1, либо вектор A_2. Вводим в базис вектор A_1. Так как минимальное значение $\theta_{01} = 5$ достигается при $l = 3$, то исключаем из базиса третий вектор A_6. За разрешающий элемент принимаем число 2, расположенное в первом столбце и третьей строке. Выполняем преобразование Жордана с элементом $x_{31} = 2$. Получаем второе опорное решение $X_2 = (5, 0, 0, 1, 5, 0)$ с базисом $Б_2 = (A_4, A_5, A_1)$, $Z(X_2) = 4$ (табл. 30.3).

Таблица 30.3

				1	1 ↓	1	−1	0	0		
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_2	θ_3
←	A_4	−1	1	0	$\boxed{1/2}$	$3/2$	1	0	$-1/2$	2	$2/3$
	A_5	0	5	0	$3/2$	$1/2$	0	1	$-1/2$	$10/3$	10
	A_1	1	5	1	$1/2$	$1/2$	0	0	$1/2$	10	10
	Δ_k		−4	0	−1	−2	0	0	1		

Это решение не является оптимальным, так как векторы A_2 и A_3 имеют отрицательные оценки $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = -2$. Определяем, введение какого из векторов A_2 или A_3 в базис опорного решения приведет к большему приращению целевой функции:

$$\max_k \Delta Z_k = \max_k \{-2 \cdot (-1), -2/3 \cdot (-2)\} = \max_k \{2, 4/3\} = 2 \text{ при } k = 2.$$

Вводим в базис вектор A_2. Минимальное значение параметра $\theta_{02} = 2$ имеет место при $l = 1$, поэтому разрешающий элемент берем в первой строке. Из базиса исключаем вектор A_4. Выполняем преобразование Жордана с элементом $x_{12} = 1/2$. Получаем третье опорное решение $X_3 = (4, 2, 0, 0, 2, 0)$ с базисом $Б_3 = (A_2, A_5, A_1)$, $Z(X_3) = 6$ (табл. 30.4).

Таблица 30.4

				1	1	1	−1	0	↓ 0	
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_6
	A_2	1	2	0	1	3	2	0	−1	—
←	A_5	0	2	0	0	−4	−3	1	$\boxed{1}$	2
	A_1	1	4	1	0	−1	−1	0	1	4
	Δ_k		6	0	0	1	2	0	0	

Опорное решение X_3 является оптимальным, так как для всех векторов условий оценки в задаче на максимум неотрицательные. Однако данное решение не единственное, так как вектор A_6, не входящий в базис, имеет нулевую оценку. Этот вектор нужно ввести в базис опорного решения, чтобы получить еще одно оптимальное решение. Вектор, выводимый из базиса, находим с помощью параметра θ_6. Так как $\theta_{06} = \min\{2, 4\} = 2$ при $l = 2$, разрешающий элемент для следующего преобразования Жордана берем во второй строке. В базис входит вектор A_6 вместо вектора A_5. Получаем второе оптимальное решение $X_4 = (2, 4, 0, 0, 0, 2)$ с базисом $Б_4 = (A_2, A_6, A_1)$, $Z(X_4) = 6$ (табл. 30.5).

Таблица 30.5

			1	1	1	−1	0	0
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	1	4	0	1	−1	−1	1	0
A_6	0	2	0	0	−4	−3	1	1
A_1	1	2	1	0	3	2	−1	0
	Δ_k	6	0	0	1	2	0	0

Исходная задача имела четыре переменные, поэтому в ответе в оптимальном решении последние две дополнительные переменные не записываем.

Ответ: $\max Z(X) = 6$ при $X^* = (1-t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$X_1^* = (4, 2, 0, 0)$, $X_2^* = (2, 4, 0, 0)$.

30.11. Решить симплексным методом

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \text{Д} \\ +x_4 \\ \\ -x_5 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду:

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Используя метод Жордана — Гаусса, приведем систему ограничений задачи к равносильной разрешенной системе уравнений (табл. 30.6). При этом, используя параметр θ_k, сохраним правые части уравнений неотрицательными. Получим начальное опорное решение $X_1 = (0, 1, 1, 1, 0)$ с базисом $Б_1 = (A_4, A_2, A_3)$. Затем вычислим оценки разложений векторов условий по базису опорного решения по формуле (30.8) и дополним таблицу расчета строкой оценок. Далее продолжим расчет симплексным методом так же, как в предыдущей задаче.

Таблица 30.6

			↓ 3	−1	−4	0	0				
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ_1	θ_2	θ_3	θ_5
Нахождение начального опорного решения		1	0	−1	1	1	0	—	—	**1**	—
		2	−5	$\boxed{1}$	1	0	0	—	**2**	2	—
		3	−8	1	2	0	−1	—	3	$^3/_2$	—
		3	−5	0	2	1	0	—	—	$^3/_2$	—
		2	−5	1	1	0	0	—	—	2	—
		1	−3	0	$\boxed{1}$	0	−1	—	—	**1**	—
← A_4	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1	2	**1**	—	—	$^1/_2$
A_2	−1	1	−2	1	0	0	1	—	—	—	1
A_3	−4	1	−3	0	1	0	−1	—	—	—	—
Δ_k		−5	11	0	0	0	3				
A_1	3	1	1	0	0	1	2				
A_2	−1	3	0	1	0	2	5				
A_3	−4	4	0	0	1	4	3				
Δ_k		−16	0	0	0	−11	−19				

Начальное опорное решение X_1 не является оптимальным, так как векторам A_1 и A_5 соответствуют положительные оценки. По признаку оптимальности в задаче на минимум все оценки должны быть неположительными. Определяем, введение какого из векторов (A_1 или A_5) в базис приведет к большему уменьшению целевой функции:

$$\min_k \Delta Z_k = \min_k \{-11 \cdot 1, -3 \cdot (^1/_2)\} = \min_k \{-11, -^3/_2\} = -11 \text{ при } k = 1.$$

В базис вводим вектор A_1. Исключаем из базиса вектор A_4, соответствующий минимуму параметра $\theta_{01} = 1$ при $l = 1$. Выполняем преобразование Жордана, получаем второе опорное решение $X_2 = (1, 3, 4, 0, 0)$ с базисом $Б_2 = (A_1, A_2, A_3)$. Данное опорное решение является оптимальным, потому что оценки для всех векторов условий неположительные. Оптимальное решение единственное, так как векторы, не входящие в базис, не имеют нулевых оценок.

Ответ: $\min Z(X) = -16$ при $X^* = (1, 3, 4)$.