30.3. Метод искусственного базиса

Данный метод применяется для решения задач линейного программирования симплексным методом в случае, когда задача не имеет начального опорного решения с базисом из единичных векторов.

Согласно данному методу для задачи линейного программирования составляется так называемая р а с ш и р е н н а я задача, которая решается симплексным методом. На основе результатов решения расширенной задачи либо находится оптимальное решение исходной задачи, либо устанавливается причина отсутствия ее решения.

Пусть имеется каноническая задача линейного программирования

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{30.19}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Без ограничения общности можно считать, что правые части уравнений системы ограничений неотрицательные, т.е. $b_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Для исходной задачи составляют расширенную задачу. При этом используют искусственные переменные.

Искусственными переменными называются неотрицательные переменные, которые вводятся в ограничения-равенства для получения начального опорного решения с базисом из единичных векторов. Каждая искусственная переменная вводится в левую часть одного из уравнений системы ограничений с коэффициентом +1 и в целевую функцию в задаче на максимум с коэффициентом $-M$, а в задаче на минимум с коэффициентом $+M$. Число M сколь угодно большое по сравнению с единицей ($M \gg 1$).

В общем случае расширенная задача на максимум имеет вид

$$\overline{Z}(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+m} \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \quad (30.20)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n + m; \quad b_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Если расширенная задача линейного программирования имеет оптимальное решение $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, \ldots, 0)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет оптимальное решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, которое получается из $\overline{X}^*$ отбрасыванием нулевых искусственных переменных (признак оптимальности решения).

Если расширенная задача имеет оптимальное решение, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то исходная задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений (признак отсутствия решения ввиду несовместности системы ограничений).

Если расширенная задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то и исходная задача не имеет решения по той же причине (признак отсутствия решения ввиду неограниченности целевой функции).

Метод искусственного базиса в основном совпадает с обычным симплексным методом, но имеет некоторые особенности.

Особенности метода искусственного базиса:

1. Ввиду того что начальное опорное решение расширенной задачи содержит искусственные переменные, входящие в целевую функцию с коэффициентом $-M$ (в задаче на максимум) или $+M$ (в задаче на минимум), оценки разложений векторов условий $\Delta_k = C_б X_k - c_k$ состоят из двух слагаемых Δ_k' и $\Delta_k''(M)$, одно из которых Δ_k' не зависит от M, а другое $\Delta_k''(M)$ зависит от M. Так как M сколь угодно велико по сравнению с единицей ($M \gg 1$), то на первом этапе расчета для нахождения векторов, вводимых в базис, используются только слагаемые оценок $\Delta_k''(M)$.

2. Соответствующие искусственным переменным векторы, выводимые из базиса опорного решения, в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

3. После того как все векторы, соответствующие искусственным переменным, исключаются из базиса, расчет продолжается обычным симплексным методом с использованием оценок Δ'_k, не зависящих от M.

30.32. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования

$$Z(X) = 7x_1 - 13x_2 - 8x_3 + 10x_4 \to \min,$$

И

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = 2, \end{cases} \left| \begin{array}{l} +x_5 \\ +x_6 \end{array} \right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Составляем расширенную задачу. В левые части уравнений системы ограничений вводим неотрицательные искусственные переменные с коэффициентом +1 (всегда). Данная задача — задача на нахождение минимума, поэтому x_5 и x_6 в целевую функцию вводятся с коэффициентом $+M$. Получаем

$$\overline{Z}(\overline{X}) = 7x_1 - 13x_2 - 8x_3 + 10x_4 + Mx_5 + Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad = 3, \\ x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 \qquad + x_6 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Приравниваем свободные переменные системы уравнений (ограничений) к нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, получаем начальное опорное решение расширенной задачи $\overline{X}_1 = (0, 0, 0, 0, 3, 2)$ с базисом из единичных векторов $\overline{Б}_1 = (A_5, A_6)$. Вычисляем по формулам (30.8) оценки разложений векторов условий по базису опорного решения и записываем в симплексную таблицу (табл. 30.7). При этом оценки Δ_k и $\overline{Z}(\overline{X}_1)$ для удобства вычислений записываем в две строки: в первую — слагаемые Δ'_k, не зависящие от M, во вторую — слагаемые $\Delta''_k(M)$, зависящие от M. Значения $\Delta''_k(M)$ удобно записывать без M, имея в виду однако, что оно там присутствует.

Т а б л и ц а 30.7

			7	−13	−8	10 ↓	M	M		
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_4
← A_5	M	3	1	−1	−3	$\boxed{2}$	1	0	3	$3/2$
A_6	M	2	1	−2	−1	1	0	1	2	2
Δ'_k		0	7	13	8	−10	0	0		
$\Delta''_k(M)$		5	2	−3	−4	3	0	0		

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в задаче на минимум имеются положительные оценки. Выбираем номер вектора A_k, вводимого в базис опорного решения, и вектора A_l, выводимого из базиса. Для этого вычисляем приращения целевой функции ΔZ_k при введении в базис каждого из векторов с положительной оценкой и находим минимум этого приращения. При этом слагаемыми оценок Δ'_k (без M) пренебрегаем до тех пор, пока хотя бы одно слагаемое $\Delta''_k(M)$ (с M) отлично от нуля. В связи с этим строка со слагаемыми оценок Δ'_k может отсутствовать в таблице до тех пор, пока присутствует строка $\Delta''_k(M)$. Находим

$$\min_{k=1,\,4}\{-2\cdot 2M,\ -{}^3/_2\cdot 3M\} = \min_{k=1,\,4}\{-4M,\ -({}^9/_2)M\} = -({}^9/_2)M \text{ при } k = 4.$$

В столбце «A_4» за разрешающий элемент выбираем коэффициент 2 в первой строке и выполняем преобразование Жордана.

Вектор A_5, выводимый из базиса, исключаем из рассмотрения (вычеркиваем). Получаем опорное решение $\overline{X}_2 = (0,\ 0,\ 0,\ {}^3/_2,\ 0,\ {}^1/_2)$ с базисом $\overline{Б}_2 = (A_4, A_6)$ (табл. 30.8).

Таблица 30.8

				7 ↓	−13	−8	10	M	M		
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_3
	A_4	10	${}^3/_2$	${}^1/_2$	$-{}^1/_2$	$-{}^3/_2$	1	—	0	3	—
←	A_6	M	${}^1/_2$	$\boxed{{}^1/_2}$	$-{}^3/_2$	${}^1/_2$	0	—	1	**1**	**1**
	Δ'_k		0	−2	8	3	0	—	0		
	$\Delta''_k(M)$		${}^1/_2$	${}^1/_2$	$-{}^1/_2$	${}^1/_2$	0	—	0		

Данное решение не является оптимальным, так как векторы A_1 и A_3 имеют положительные оценки $\Delta''_1(M) = \Delta''_3(M) = {}^1/_2M$. Введение в базис опорного решения любого из этих векторов приведет к уменьшению целевой функции на одну и ту же величину $\Delta Z_1 = \Delta Z_3 = -1\cdot({}^1/_2)M = -M/2$ (слагаемыми без M пренебрегаем). По своему усмотрению вводим в базис вектор A_1, получаем опорное решение $\overline{X}_3 = (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ с базисом $\overline{Б}_3 = (A_4, A_1)$ (табл. 30.9).

Таблица 30.9

				7	−13 ↓	−8	10	M	M	
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_2
←	A_4	10	1	0	$\boxed{1}$	−2	1	—	—	**1**
	A_1	7	1	1	−3	1	0	—	—	—
	Δ'_k		17	0	2	−5	0	—	—	

Опорное решение $\overline{X}_3$ не является оптимальным, так как вектор A_2 имеет положительную оценку. Вводим этот вектор в базис опорного решения. В соответствующем столбце симплексной таблицы единственное положительное число, а именно 1, принимаем за разрешающий элемент для перехода к новому опорному решению. Получаем следующее опорное решение $\overline{X}_4 = (4, 1, 0, 0, 0, 0)$, которое является оптимальным решением расширенной задачи, так как оценки для всех векторов неположительные (табл. 30.10).

Таблица 30.10

			7	−13	−8	10	M	M
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	−13	1	0	1	−2	1	—	—
A_1	7	4	1	0	−5	3	—	—
Δ'_k		15	0	0	−1	−2	—	—

Исходная задача также имеет оптимальное решение, которое получается из оптимального решения расширенной задачи отбрасыванием нулевых искусственных переменных, т.е. $X^* = (4, 1, 0, 0)$.

Ответ: $\min Z(X) = 15$ при $X^* = (4, 1, 0, 0)$.

30.33. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования

$$Z(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} & & \text{Д} \\ 2x_1 \phantom{{}+ x_2} + x_3 \geqslant 2, & & - x_4 \\ -\ x_1 + \ x_2 + x_3 \leqslant 6, & & + x_5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8, & & + x_6 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду. Для этого вводим дополнительные переменные x_4, x_5, x_6:

$$Z(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} & \text{И} \\ 2x_1 \phantom{{}+ x_2} + x_3 - x_4 = 2, & + x_7 \\ -\ x_1 + \ x_2 + x_3 + x_5 = 6, & \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 8, & \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Чтобы найти начальное опорное решение с базисом из единичных векторов, вводим в первое уравнение-ограничение искусственную переменную, получаем расширенную задачу

$$\overline{Z}(\overline{X}) = x_1 - x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 \qquad\qquad + x_7 = 2, \\ -\ x_1 + \ x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Данная расширенная задача имеет начальное опорное решение $\overline{X}_1 = (0, 0, 0, 0, 6, 8, 2)$ с базисом из единичных векторов $\overline{Б}_1 = (A_7, A_5, A_6)$. Вычисляем оценки векторов условий и записываем в симплексную таблицу (табл. 30.11). Это решение не является оптимальным, так как оценки $\Delta_1''(M) = -2M$ и $\Delta_3''(M) = -M$ отрицательные. Находим приращение целевой функции при введении в базис опорного решения векторов A_1 и A_3. Получаем $\Delta\overline{Z}_1 = -1 \cdot (-2M) = 2M$, $\Delta\overline{Z}_3 = -2 \cdot (-M) = 2M$. По своему усмотрению вводим в базис вектор A_1.

Таблица 30.11

			1 ↓	−1	−2	0	0	0	M		
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ_1	θ_3
← A_7	$-M$	2	$\boxed{2}$	0	1	−1	0	0	1	1	2
A_5	0	6	−1	1	1	0	1	0	0	—	6
A_6	0	8	−3	2	1	0	0	1	0	—	8
Δ'_k		0	−1	1	2	0	0	0	0		
$\Delta''_k(M)$		2	−2	0	−1	1	0	0	0		
A_1	1	1	1	0	$^1/_2$	[redacted]	0	0	—		
A_5	0	7	0	1	$^3/_2$	[redacted]	1	0	—		
A_6	0	11	0	2	$^5/_2$	[redacted]	0	1	—		
Δ'_k		1	0	1	$^5/_2$	[redacted]	0	0	—		

Выполняем преобразование Жордана с разрешающим элементом $x_{11} = 2$, получаем второе опорное решение $\overline{X}_2 = (1, 0, 0, 0, 7, 11, 0)$ с базисом из единичных векторов $\overline{Б}_2 = (A_1, A_5, A_6)$. Данное решение не является оптимальным, потому что оценка для вектора A_4 отрицательная: $\Delta_4' = -^1/_2 < 0$. Однако опорное решение нельзя улучшить, так как все коэффициенты разложения вектора A_4 по базису опорного решения отрицательные: $x_{i4} < 0 \quad (i = 1, 2, 3)$. Таким образом, расширенная задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции. Исходная задача также не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.

Ответ: $Z(X) \to +\infty$.