МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Учебное пособие

Ставрополь
«АГРУС»
2014

УДК 621.311.001.57(07)
ББК 22.1

Рецензенты:
Доцент кафедры автоматики, электроники и метрологии кандидат сельскохозяйственных наук, доцент
Ш. Ж. Габриелян

Доцент кафедры применения электрической энергии в сельском хозяйстве кандидат технических наук, доцент
С. Н. Антонов

Моделирование в электроэнергетике : учебное пособие / А. Ф. Шаталов, И. Н. Воротников, М. А. Мастепаненко, И. К. Шарипов, С. В. Аникуев. – Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2014. – 140 с.

Изложены основные принципы построения математических моделей в задачах исследования физических процессов, решение задачи расчета установившихся режимов и анализа статической устойчивости электроэнергетических систем, а также задач синтеза и анализа логических схем, практические навыки использования современных методов компьютерного моделирования, в частности в программных системах *Mathcad, Microsoft Excel, Electronics Workbench.*

Учебное пособие подготовлено в соответствии с основной образовательной программой подготовки бакалавра по направлениям 140400 «Электроэнергетика и электротехника» и 110800 «Агроинженерия».

Курс рассчитан на студентов всех форм обучения, его информационное содержание достаточно для изучения дисциплины в объеме, предусмотренном стандартами высшего профессионального образования.

УДК 621.311.001.57(07)
ББК 22.1

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Моделирование в электроэнергетике» позволяет сформировать у студентов целостное представление о моделировании как методе познания окружающего мира.

В данном курсе изучаются основные разделы прикладной математики, которые находят наибольшее применение при решении базовых задач электроэнергетики. Это позволяет связать математику как общетеоретическую науку с ее применением в инженерной практике и научных исследованиях, сформировать грамотный технический подход к решению инженерных и научных проблем, а также подготовить студента к более глубокому и критическому восприятию специальных дисциплин.

В пособии изложены основные принципы построения математических моделей в задачах исследования физических процессов, а также проектирования и управления техническими объектами. В частности, к ним относятся исследование физических процессов в длинных линиях на основе моделей микроуровня, решение задачи расчета установившихся режимов и анализа статической устойчивости ЭЭС на основе моделей макроуровня, а также задач синтеза и анализа логических схем с использованием моделей метауровня.

Особое внимание уделено получению практических навыков использования современных методов компьютерного моделирования, в частности в программных системах *Mathcad, Microsoft Excel, Electronics Workbench.*

1. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Цель работы. Применение различных видов моделей при решении электротехнических задач в среде *Mathcad и Electronics Workbench*. Исследование возможностей графического моделирования для представления процессов и функций в среде *Mathcad* и *Excel*.

1.1. Краткие теоретические сведения

Моделирование представляет собой универсальный и эффективный метод познания окружающего мира. Процесс решения любой задачи неразрывно связан с формированием того или иного вида модели [1, 2].

Модель – это материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя при этом наиболее типичные его черты, характерные для решаемой задачи.

При построении модели учитываются только те факторы, которые наиболее существенны для проводимого исследования. Следовательно, *фундаментальным свойством модели* является то, что она всегда беднее объекта-оригинала.

Использование модели позволяет:

- понять, как устроен реальный объект, каковы его структура, свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром;
- научиться управлять объектом (процессом), выбрать наилучший способ управления при заданных целях;
- прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Эффективная модель должна обладать рядом свойств, таких как [4]:

- *адекватность* – степень соответствия объекту-оригиналу (полнота модели);
- *универсальность* – применимость модели к анализу многочисленной группы объектов и решения широкого класса задач;
- *экономичность* – количество вычислительных ресурсов, которые необходимы для реализации модели.

Формирование модели – сложный творческий процесс, который требует от исследователя опыта, интуиции, глубокого знания предметной области и возможностей современной компьютерной техники для принятия компромиссных решений и получения эффективной модели (рис. 1.1).

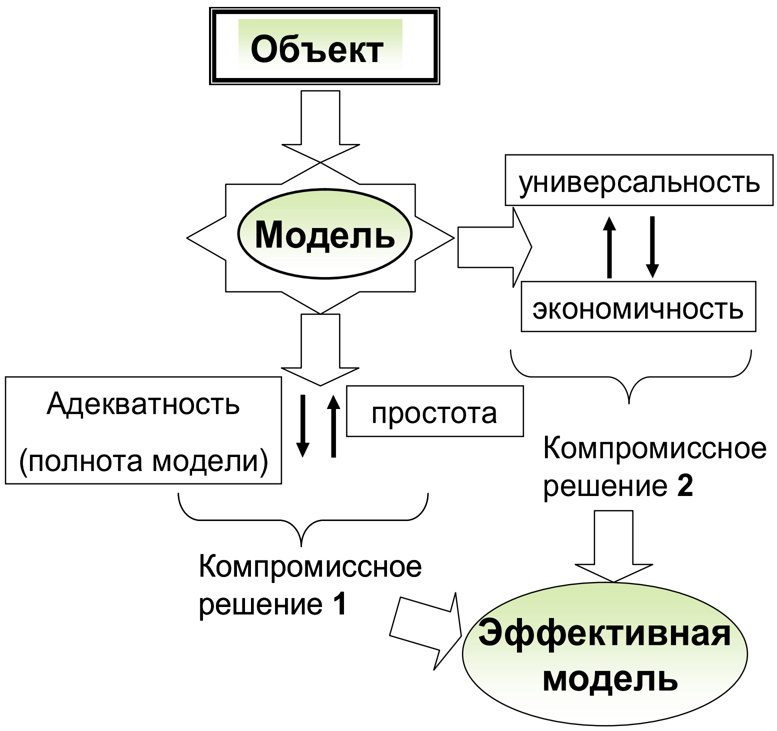


Рис. 1.1 - Процедура формирования эффективной модели

Модели можно классифицировать по ряду признаков, например по способу представления модели подразделяются на материальные и идеальные [1, 2, 4, 5].

К *материальным* можно отнести, в частности, *физические модели*, которые представляют собой увеличенную или уменьшенную копию объекта-оригинала. При этом допускается исследование свойств с последующим переносом их на реальный объект на основе теории подобия.

Идеальные включают в себя образные (иконические), вербальные (словесные), знаковые модели. К *знаковым*, в частности, относятся графические и математические модели. *Графические модели* позволяют с помощью графики отобразить существенные свойства объекта. *Математические модели* позволяют описать свойства объекта на языке математики для решения различных исследовательских задач.

В лабораторной работе исследуются возможности применения различных форм моделей для решения электротехнических задач с помощью универсальных и специализированных программных систем, таких как *Mathcad, Electronics Workbench и Microsoft Excel.*

1.2. Задание на выполнение лабораторной работы

1. В качестве исходных данных задана схема электрических соединений по вариантам (табл. 1.1, рис. 1.2.1 и 1.2.2).

- Сформировать физическую модель в виде электрической схемы в *Electronics Workbench* и измерить значения токов I_1, I_2, I_3. Краткое описание принципов работы в среде *Electronics Workbench* представлено в приложении 1.
- Сформировать математическую модель, используя законы Ома и Кирхгофа и рассчитать значения токов I_1, I_2, I_3 (в письменной форме) и в среде *Mathcad* (приложение 4).
- Сравнить результаты, полученные с помощью физической и математической моделей.

Таблица 1.1 – Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	R_1	R_2	R_3	U	Номер схемы
1	10	15	20	220	1.2.1
2	8	16	5	32	1.2.2
3	9	14	19	220	1.2.1
4	7	15	4	32	1.2.2
5	11	16	21	220	1.2.1
6	10	18	7	32	1.2.2
7	10	17	12	220	1.2.1
8	5	8	15	32	1.2.2
9	12	17	22	220	1.2.1
10	6	14	3	32	1.2.2
11	3	4	5	220	1.2.1
12	10	11	7	32	1.2.2

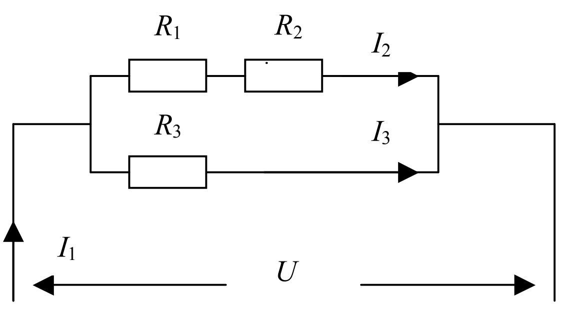


Рис. 1.2.1

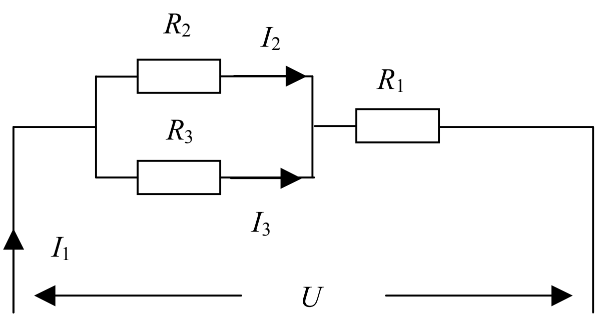


Рис. 1.2.2

2. В качестве исходных данных задана схема электрических соединений (табл. 1.2, рис. 1.2.3, 1.2.4).

Таблица 1.2 – Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	R_1	R_2	R_3	E_1	E_3	Номер схемы
1	7	4	8	20	15	1.2.3
2	2	6	3	12	15	1.2.4
3	6	3	7	20	15	1.2.3
4	4	8	5	12	15	1.2.4
5	8	5	9	20	15	1.2.3
6	3	7	4	12	15	1.2.4
7	5	2	6	20	15	1.2.3
8	3	2	7	12	15	1.2.4
9	9	6	10	20	15	1.2.3
10	4	5	8	12	15	1.2.4
11	11	10	7	20	15	1.2.3
12	4	9	5	12	15	1.2.4

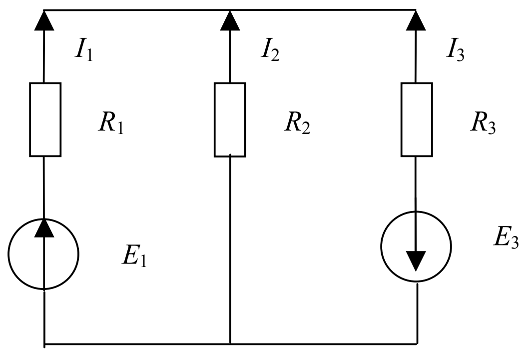


Рис. 1.2.3

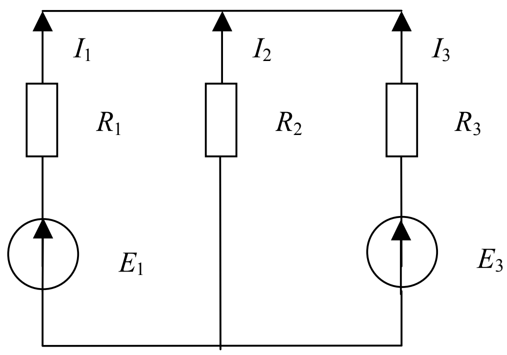


Рис. 1.2.4

- Сформировать математическую модель в виде системы уравнений на основе первого и второго законов Кирхгофа и рассчитать значения токов I_1, I_2, I_3 в среде Mathcad двумя способами:

$\Rightarrow$ с использованием конструкции $\{Given \ldots\ldots Find\}$;

$\Rightarrow$ с использованием матричного метода (принцип работы изложен в приложении 4).

- Сформировать физическую модель в виде электрической схемы в *Electronics Workbench* и измерить значения токов I_1, I_2, I_3.

3. Задано уравнение, моделирующее переходные процессы в электрической системе:

$$f(t) = \frac{k \cdot \exp(0.11t + 2)}{(13 + t)} \sin(t) \tag{1.1}$$

$$f1(t) = \frac{k \cdot \exp(0.11t + 2)}{(10 + t)} \sin(t) \tag{1.2}$$

- Сформировать графическую модель в среде *Mathcad,* построив графики переходных процессов на интервале времени $t = 0 \ldots 10$, если коэффициент k принимает два возможных значения: $k_1 = 20, k_2 = 50$.

4. Заданы статистические данные о нагрузке предприятия (табл. 1.3).

Таблица 1.3 – Варианты индивидуальных заданий

Вариант № 1

Час	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Р, МВт	112	154	136	174	205	275	190	254	269	210	173	157	148

Вариант № 2

Час	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Р, МВт	80	87	82	103	127	134	115	140	143	124	109	93	89

- Построить график нагрузки в среде *Microsoft Excel.* Проанализировать возможности работы с графическими моделями, которые предоставляет *Microsoft Excel.*

- Определить значения математического ожидания и среднеквадратического отклонения нагрузки на заданном интервале, используя встроенные функции *Microsoft Excel.*

Вопросы к лабораторной работе:

1. Определение математического моделирования.
2. Что такое математическая модель?
3. Что такое физическая модель?
4. Отличие материальных и идеальных моделей.
5. Свойства эффективной модели.
6. Процедура формирования эффективной модели.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Цель работы: научится моделировать свободные и вынужденные установившиеся процессы в линейной цепи первого порядка используя пакет MathCAD. На основании полученной модели выяснить влияние параметров цепи на режим ее работы. Сделать выводы о погрешностях моделирования и об адекватности модели.

2.1. Краткие теоретические сведения

Под ***переходным (динамическим, нестационарным) процессом или режимом*** в электрических цепях понимается процесс перехода цепи из одного установившегося состояния (режима) в другое. При установившихся, или стационарных, режимах в цепях постоянного тока напряжения и токи неизменны во времени, а в цепях переменного тока они представляют собой периодические функции времени. Установившиеся режимы при заданных и неизменных параметрах цепи полностью определяются только источником энергии. Следовательно, источники постоянного напряжения (или тока) создают в цепи постоянный ток, а источники переменного напряжения (или тока) – переменный ток той же частоты, что и частота источника энергии.

Переходные процессы возникают при любых изменениях режима электрической цепи: при подключении и отключении цепи, при изменении нагрузки, при возникновении аварийных режимов (короткое замыкание, обрыв провода и т.д.). Изменения в электрической цепи можно представить в виде тех или иных переключений, называемых в общем случае коммутацией. Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего до коммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему после коммутационному режиму.

Переходные процессы обычно быстро протекающие: длительность их составляет десятые, сотые, а иногда и миллиардные доли секунды. Сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд. Тем не менее изучение переходных процессов весьма важно, так как позволяет установить, как деформируется по форме и амплитуде сигнал, выявить превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса, а также определять продолжительность переходного процесса. С другой стороны, работа многих электротехнических устройств, особенно устройств промышленной электроники, основана на переходных процессах. Например, в электрических нагревательных печах качество выпускаемого материала зависит от характера протекания переходного процесса. Чрезмерно быстрое нагревание может стать причиной брака, а чрезмерно медленное отрицательно оказывается на качестве материала и приводит к снижению производительности [2, 3, 4].

Основные методы анализа переходных процессов в линейных цепях:

1. **Классический метод,** заключающийся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи.

2. **Операторный метод,** заключающийся в решении системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных с последующим переходом от найденных изображений к оригиналам.

3. **Частотный метод,** основанный на преобразовании Фурье и находящий широкое применение при решении задач синтеза.

4. Метод расчета с помощью **интеграла Дюамеля,** используемый при сложной форме кривой возмущающего воздействия.

5. **Метод переменных состояния,** представляющий собой упорядоченный способ определения электромагнитного состояния цепи на основе решения системы дифференциальных уравнений первого прядка, записанных в нормальной форме (форме Коши).

Классический метод расчета

Классический метод расчета переходных процессов заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе.

В общем случае при использовании классического метода расчета составляются уравнения электромагнитного состояния цепи по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов, связанных между собой на отдельных элементах цепи соотношениями, приведенными в табл. 2.1.

Для анализа переходного процесса предварительно следует привести схему к минимальному числу накопителей энергии, исключив параллельные и последовательные соединения однотипных реактивных элементов (индуктивностей или емкостей).

Система интегродифференциальных уравнений, составленных в соответствии с законами Кирхгофа или методом контурных токов, может быть сведена путем подстановки к одному дифференциальному уравнению, которое используется для составления характеристического уравнения.

Таблица 2.1 - Связь мгновенных значений напряжений и токов на элементах электрической цепи

Резистор (идеальное активное сопротивление)	Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)	Конденсатор (идеальная емкость)
$u_R = Ri_R$	$u_L = L\frac{di_L}{dt}$ при наличии магнитной связи с катушкой, обтекаемой током i_M $u_L = L\frac{di_L}{dt} \pm M\frac{di_M}{dt}$	$i_C = C\frac{du_C}{dt}$ $u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt$

Порядок дифференциального, следовательно, и характеристического уравнения зависит от числа реактивных элементов приведенной схемы. Главная трудность в решения задачи классическим методом для уравнений высоких порядков состоит в отыскании корней характеристического уравнения и постоянных интегрирования. Поэтому для решения уравнений порядка выше второго применяют другие методы, в частности операторный метод, основанный на применении преобразования Лапласа и исключающий трудоемкую процедуру отыскания постоянных интегрирования.

Для практических целей при анализе переходных процессов в любой схеме классическим методом может быть рекомендован следующий алгоритм (пример расчета приведен в приложении 2 и 3):

1. Рассчитать принужденный (установившийся) режим при $t \to \infty$. Определить принужденные токи и напряжения.
2. Рассчитать режим до коммутации. Определить токи в ветвях с индуктивностью и напряжения на конденсаторах. Значения этих величин в момент коммутации является независимыми начальными условиями.
3. Составить дифференциальные уравнения для свободного процесса *(E = 0)* в схеме после коммутации по законам Кирхгофа или по методу контурных токов. Алгебраизиро-

вать (провести математические преобразования) данные уравнения, получить характеристическое уравнение и найти его корни. Существуют приемы, упрощающие операцию отыскания корней характеристического уравнения, например, приравнивание нулю входного операторного сопротивления цепи, которое получается путем замены в выражении комплексного сопротивления цепи множителя «$j\omega$» на оператор «p».

4. Записать общие выражения для искомых напряжений и токов в соответствии с видом корней характеристического уравнения.

5. Переписать величины, полученные в п. 4, и производные от них при $t = 0$.

6. Определить необходимые зависимые начальные условия, используя независимые начальные условия.

7. Подставив начальные условия в уравнения п. 5, найти постоянные интегрирования.

8. Записать законы изменения искомых токов и напряжений.

2.2. Задание на выполнение лабораторной работы

Пусть цепи (рис. 2.1) и (рис. 2.2) находятся под воздействием напряжения:

$$u(t) = U \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \qquad (2.1)$$

Смоделировать установившийся и затухающий процесс в электрических цепях (рис. 2.1) и (рис. 2.2):

1. Получить решения – найти токи, текущие по цепи и исследовать влияние параметров на сдвиг фаз между подведенным напряжением и током. Использовать пакет MathCAD и встроенный оператор Odesolve (приложение 4).

2. Получить, меняя величины сопротивления, индуктивности и емкости цепи сведения о закономерностях протекания установившихся и переходных процессов.

Принять: U=100 В, ω=314 $с^{-1}$.

Таблица 2.2 – Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	***R*₁,Ом** *(рис.2.1)*	***R*₂,Ом** *(рис.2.2)*	***С, мкФ***	***L, Гн***
1	10	500	20	0,1
2	5	10	15	0,1
3	9	1000	10	0,1
4	7	15	20	0,1
5	5	10	15	0,1
6	10	18	10	0,2
7	5	10	20	0,2
8	5	8	15	0,2
9	12	17	10	0,3
10	5	10	20	0,3
11	3	4	15	0,3
12	10	500	10	0,3

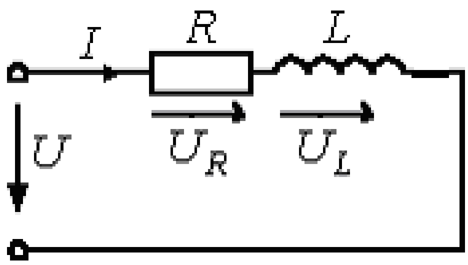


Рис. 2.1

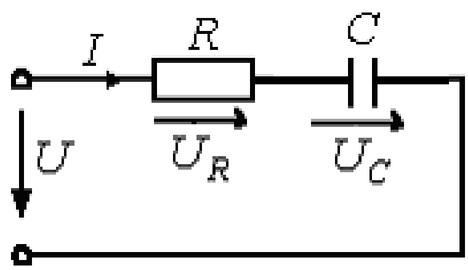


Рис. 2.2

Вопросы к лабораторной работе:

1. Правила составления математических моделей.
2. Для чего составляются дифференциальные уравнения.
3. Как вычислить корень характеристического уравнения.
4. Методы решения дифференциальных уравнений в математическом пакете MathCad.
5. Типы дифференциальных уравнений.
6. Операторы для решения дифференциальных уравнений в математическом пакете MathCad.
7. Что такое 1-я производная?
8. Что такое 2-я производная?
9. Из чего складывается погрешность решения дифференциального уравнения в математическом пакете MathCad?
10. Дать определения установившегося режима в цепи?
11. Что такое постоянная времени измерительной цепи?
12. Что такое электрический конденсатор?
13. Дать определение переходному процессу.
14. Основные методы анализа переходных процессов.

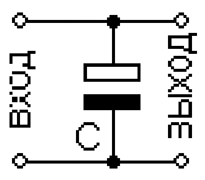
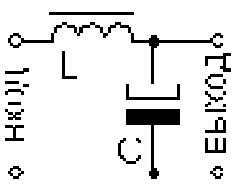
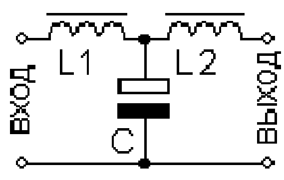
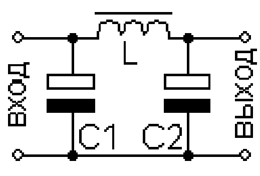
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЗАРЯДКИ КОНДЕНСАТОРА В ЦЕПИ ОДНОПОЛУПЕРИОДНОГО ВЫПРЯМИТЕЛЯ

Цель работы: научится моделировать процесс в зарядки конденсатора в линейной цепи синусоидального тока используя пакет MathCAD, получить из созданной модели сведения о влиянии параметров на время зарядки. Сделать выводы о погрешностях моделирования и об адекватности модели.

3.1. Краткие теоретические сведения

Сглаживающие фильтры питания предназначены для уменьшения пульсаций выпрямленного напряжения. Принцип работы простой – во время действия полуволны напряжения происходит заряд реактивных элементов (конденсатора, дросселя) от источника – диодного выпрямителя, и их разряд на нагрузку во время отсутствия, либо малого по амплитуде напряжения [4, 5, 6, 7, 8].

Основные схемы сглаживающих фильтров питания

1. Ёмкость	2. Г-образный	3. Т-образный	4. П-образный
			

Простейшим методом сглаживания пульсаций является применение фильтра в виде конденсатора достаточно большой ёмкости, шунтирующего нагрузку (сопротивление нагрузки). Конденсатор хорошо сглаживает пульсации, если его емкость такова, что выполняется условие: $1 / (\omega C) << R_н$.

Во время действия синусоидального сигнала, когда напряжение на диоде выпрямителя прямое, через диод проходит ток, заряжающий конденсатор до напряжения, близкого к максимальному. Когда напряжение на выходе диодного выпрямителя оказывается меньше напряжения заряда конденсатора, конденсатор разряжается через *нагрузку* $R_н$ и создает на ней напряжение, которое постепенно снижается по мере разряда конденсатора через нагрузку. В каждый следующий полупериод конденсатор подзаряжается и его напряжение снова возрастает [7, 8, 9].

Чем больше емкость C и сопротивление нагрузки $R_н$, тем медленнее разряжается конденсатор, тем меньше пульсации и тем ближе среднее значение выходного напряжения $U_{ср}$ к максимальному значению синусоиды U_{max}. Если нагрузку вообще отключить, то в режиме холостого хода на конденсаторе получится постоянное напряжение равное U_{max}, без всяких пульсаций.

Работа простейшего сглаживающего фильтра на конденсаторе в цепи однополупериодного выпрямителя поясняется рис. 3.1:

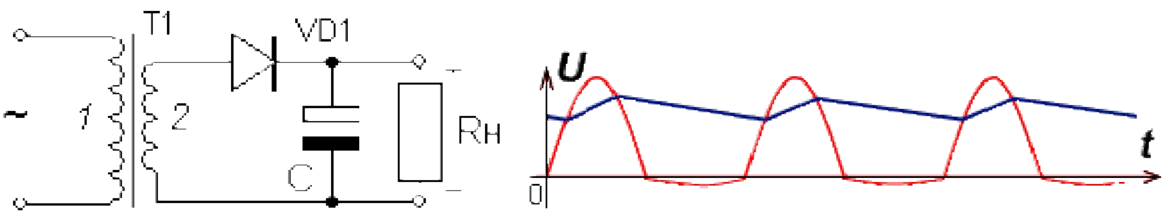


Рис. 3.1

Красным цветом показано напряжение на выходе выпрямителя без сглаживающего конденсатора, а синим – при его наличии.

Если пульсации должны быть малыми, или сопротивление нагрузки $R_н$ мало, то необходима чрезмерно большая емкость конденсатора, т.е. сглаживание пульсаций одним конденсатором практически осуществить нельзя. Приходится использовать более сложный сглаживающий фильтр.

Выпрямители широко используются в электрических устройствах. Пусть дана электрическая цепь (рис. 3.2) в которой конденсатор для фильтрации подключается к однополупериодному выпрямителю через резистор. Параметры всех элементов *(R, C)* и входного напряжения *(f, Um)* заданы.

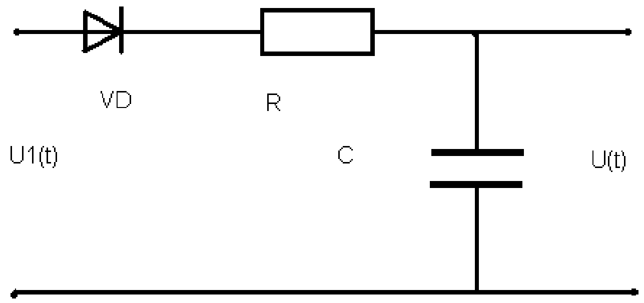


Рис. 3.2

Очевидно, напряжение на входе $U1(t) = U_M Cos\omega t$, а зарядка конденсатора будет, если напряжение однополупериодного выпрямителя будет положительно и больше, чем напряжение на конденсаторе.

Пример.

Запишем дифференциальное уравнение состояния электрической цепи выразив первую производную с помощью встроенного оператора MathCAD ***IF***.

Вводим данные параметры:

$Um := 220 \quad R := 20000 \quad C := 1 \cdot 10^{-6} \quad u_0 := 0$

$F := 50$

где $u_0 := 0$ начальное напряжение на конденсаторе.

Находим циклическую частоту:

$\omega := 2 \cdot \pi \cdot F$

.

Задаем время, необходимое для расчета:

$t := 0,0 + 0.00001 .. 0.2$

.

Записываем дифференциальное уравнение

$$D(t,u) := \begin{vmatrix} \left[\left(\frac{1}{R \cdot C}\right) \cdot Um \cdot \cos(\omega \cdot t) - u_0\right] & \text{if } Um \cdot \cos(\omega \cdot t) > u_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

.

Выражаем первую производную с учетом начальных условий и оператора ***IF***:

$$D(t,u) := \begin{cases} \left[\left(\frac{1}{R \cdot C}\right) \cdot Um \cdot \cos(\omega \cdot t) - u_0\right] & \text{if } Um \cdot \cos(\omega \cdot t) > u_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

.

Для решения записанного уравнения используем функцию ***Bulstoer***, которая лучше всего подходит для решения задач с резко отличными этапами анализируемых процессов (приложение 4):

$$Z := \mathrm{Bulstoer}(u, 0, 0.1, 100, D)$$

.

Для построения графика изменения напряжения на конденсаторе задаем ранжированную переменную:

$$i := 0 .. \mathrm{rows}(Z) - 1$$

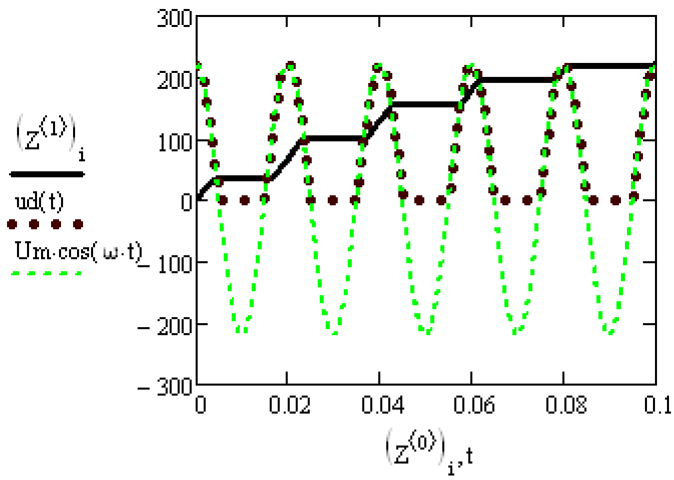
.

Выражаем закон изменения напряжения на диоде (выпрямленное напряжение):

$$ud(t) := \begin{cases} (Um \cdot \cos(\omega \cdot t)) & \text{if } Um \cdot \cos(\omega \cdot t) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

.

Строим графики изменения входного напряжения, выпрямленного напряжения и напряжения на конденсаторе:



.

3.2. Задание на выполнение лабораторной работы

1. Смоделировать процесс в зарядки конденсатора в цепи однополупериодного выпрямителя согласно заданного преподавателем варианта.
2. Получить сведения о влиянии величин емкости, сопротивления на время зарядки.
3. Уяснить смысл параметров и операторов, входящих в компьютерную программу.
4. Оформить отчет. Подготовиться к сдаче работы.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Смоделировать изменения напряжения на конденсаторе после подачи входного напряжения U1(t), если Um=25В, F=50Гц, R=200Ом, C=10мкФ. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе составляло u_0=0В.

   Определить, как меняется время полной зарядки конденсатора при изменении сопротивления резистора.
2. Смоделировать изменения напряжения на конденсаторе после подачи входного напряжения U1(t), если Um=200В, F=60Гц, R=100Ом, C=100мкФ. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе составляло u_0=0В.

   Определить, как меняется время полной зарядки конденсатора при изменении сопротивления резистора.
3. Смоделировать изменения напряжения на конденсаторе после подачи входного напряжения U1(t), если Um=250В, F=20Гц, R=100Ом, C=50мкФ. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе составляло u_0=0В.

   Определить, как меняется время полной зарядки конденсатора при изменении сопротивления резистора.
4. Смоделировать изменения напряжения на конденсаторе после подачи входного напряжения U1(t), если Um=25В,

F=20Гц, R=150Ом, C=10мкФ. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе составляло u_0=0В.

Определить, как меняется время полной зарядки конденсатора при изменении сопротивления резистора.

5. Смоделировать изменения напряжения на конденсаторе после подачи входного напряжения U1(t), если Um=20В, F=50Гц, R=500Ом, C=40мкФ. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе составляло u_0=0В.

Определить, как меняется время полной зарядки конденсатора при изменении сопротивления резистора.

6. Смоделировать изменения напряжения на конденсаторе после подачи входного напряжения U1(t), если Um=50В, F=40Гц, R=400Ом, C=10мкФ. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе составляло u_0=0В.

Определить, как меняется время полной зарядки конденсатора при изменении сопротивления резистора.

7. Смоделировать изменения напряжения на конденсаторе после подачи входного напряжения U1(t), если Um=250В, F=50Гц, R=20000Ом, C=1мкФ. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе составляло u_0=0В.

Определить, как меняется время полной зарядки конденсатора при изменении сопротивления резистора.

4. РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Цель работы. Моделирование установившихся режимов ЭЭС на основе линейных уравнений состояния (обобщенного уравнения состояния и уравнения узловых напряжений) в среде *Mathcad.*

4.1. Краткие теоретические сведения

Задача расчета и анализа установившихся режимов является базовой как при проектировании, так и управлении электроэнергетическими системами (ЭЭС) [1, 2, 7].

При проектировании ЭЭС расчет установившихся режимов производится с целью выбора и уточнения параметров проектируемой системы. В процессе эксплуатации подобные расчеты позволяют оперативно управлять и прогнозировать работу ЭЭС. При этом осуществляется оценка допустимости режима по техническим условиям оборудования.

Постановка задачи расчета режима функционирования определяется особенностями ЭЭС как сложной технической системы, которая включает в себя большое количество элементов, вырабатывающих, преобразующих, передающих, распределяющих, потребляющих электроэнергию и образующих сложно-замкнутую разветвленную структуру [2, 3, 4].

Режимом работы ЭЭС называется *состояние* системы в любой момент времени или на некотором интервале времени.

Под *установившимся режимом* понимается такое состояние ЭЭС, когда параметры системы на рассматриваемом интервале времени сохраняются неизменными или изменяются достаточно медленно. Задача расчета установившихся режимов ЭЭС сводится к определению совокупности параметров, характеризующих работу системы: напряжений в различных точках системы, токов в ее элементах, потоков и потерь мощности и т.д.

Проведение расчета установившегося режима связано с рядом основных этапов:

- предварительное преобразование и переход к расчетной схеме электрической системы;
- формирование уравнения состояния по известным исходным данным с учетом структуры расчетной схемы;
- выбор метода расчета, составление алгоритма и программы на ЭВМ;
- проведение расчета установившегося режима на ЭВМ;
- анализ точности полученных результатов.

В основе решения задачи расчета режима лежит использование математических моделей макроуровня, представляющих собой линейные уравнения состояния (например, обобщенное уравнение состояния, уравнения узловых напряжений [1, 2, 7]) и нелинейные уравнения состояния (например, уравнения узловых напряжений в форме баланса мощности или в форме баланса токов [2]).

Математические модели макроуровня, применяемые в задаче расчета установившихся режимов, основаны на законах Ома и Кирхгофа, представленных в матричной форме записи.

Рассмотрим две формы линейных уравнений состояния, которые позволяют произвести расчет установившегося режима при упрощенном представлении нагрузки и генерации мощности с помощью линейных источников тока (задающего тока).

Модель 1. Классической формой линейной модели является *обобщенное уравнение состояния.*

1-й закон Кирхгофа:

$$MI_{\text{В}} = J; \qquad (4.1)$$

2-й закон Кирхгофа:

$$NZ_{В}\, I_{В} = E_{K}\,, \tag{4.2}$$

где M – матрица инциденций 1-го рода описывает связь ветвей и узлов схемы.

Структура ***Правила формирования***

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ветви} \\ & & j \\ \text{Узлы} & i & \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots \\ m_{ij} & \\ \vdots & \end{bmatrix} \end{array} \qquad m_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если ветвь выходит из узла } i \\ \mathbf{-1}, & \text{если ветвь входит в узел } i \\ \mathbf{0}, & \text{если ветвь не связана с узлом} \end{cases}$$

N – матрица инциденций 2-го рода описывает связь ветвей и независимых контуров

Структура ***Правила формирования***

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ветви} \\ & & j \\ \text{контуры} & i & \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots \\ n_{ij} & \\ \vdots & \end{bmatrix} \end{array} \qquad n_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если направление ветви и контура совпадает} \\ \mathbf{-1}, & \text{если направление ветви и контура не совпадает} \\ \mathbf{0}, & \text{если ветвь не связана с контуром} \end{cases}$$

n – число узлов, m – число ветвей, L – число независимых контуров **.**

Вектор задающих токов **Матрица сопротивлений ветвей**

$$J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} \qquad Z_{В} = \begin{bmatrix} Z_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_m \end{bmatrix} = Y_{В}^{-1}$$

Вектор токов ветвей	**Вектор ЭДС ветвей**	**Вектор контурных токов**
$I_В = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}$	$E_В = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}$	$E_K = NE_В = \begin{bmatrix} E_{K1} \\ E_{K2} \\ \vdots \\ E_{KL} \end{bmatrix}$

Обобщенное уравнение состояния, полученное на основе 1-го и 2-го законов Кирхгофа, имеет вид:

$$AI_В = F\ , \tag{4.3}$$

где $A = \begin{bmatrix} M \\ --- \\ NZ_В \end{bmatrix}$ – блочная матрица коэффициентов;

$F = \begin{bmatrix} J \\ --- \\ E_K \end{bmatrix}$ – блочная матрица свободных членов уравнений.

Представленная модель является универсальной, но не экономичной в связи с большой размерностью системы уравнений (4.3). Поэтому наибольшее распространение в практике расчета установившихся режимов получило уравнение узловых напряжений [2, 3, 4, 7].

Модель 2. Линейная форма *уравнения узловых напряжений.*

$$Y_у U_\Delta = J - MY_В E_В\ , \tag{4.4}$$

где $Y_у = MY_В M^T$ – матрица узловых проводимостей;

$U_\Delta = [U_i - U_б]$ – матрица узловых напряжений;

$U_б$ – базисное напряжение балансирующего узла;

$Y_В = Z_В^{-1}$ – матрица проводимостей ветвей;

$E_В$ – матрица ЭДС ветвей;

J – вектор задающих токов.

Если в схеме замещения нагрузка и генерация мощности моделируются с помощью задающих токов, то $E_В$ = 0 и уравнение узловых напряжений имеет вид:

$$Y_у U_Δ = J. \tag{4.5}$$

Алгоритм расчета установившегося режима по уравнению узловых напряжений включает в себя следующие этапы:

1. Расчет узловых напряжений по уравнению (4.5)

$U_Δ = Y_у^{-1} J.$

2. Определение уровней напряжений в узлах:

$$U = U_Δ + U_б\,. \tag{4.6}$$

Возможно выполнение этапов 1 и 2 одновременно.

$$U = Y_у^{-1}(J - Y_б U_б)\,, \tag{4.7}$$

где $Y_б$ – матрица проводимостей ветвей, связывающих узлы схемы с балансирующим узлом $Б$.

3. Расчет падений напряжений в ветвях схемы:

$$U_В = M^T U_Δ = M^T (U - U_б)\,. \tag{4.8}$$

4. Определение токов в ветвях схемы:

$I_В = Y_В(U_В + E_В)$. (4.9)

5. Расчет потоков мощности *P, Q*.

4.2. Задание на выполнение лабораторной работы

1. *Расчет установившегося режима по линейным моделям для сети постоянного тока.*

- Рассчитать токи в ветвях расчетной схемы сети постоянного тока (рис. 4.1), используя обобщенное уравнение состояния. Исходные данные по вариантам приведены в табл. 4.1.

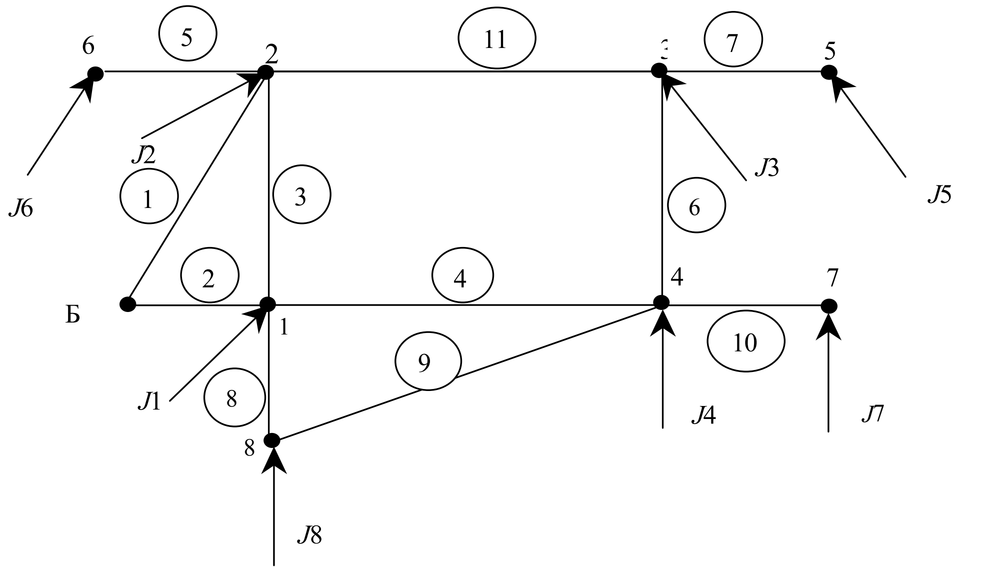


Рис. 4.1

Алгоритм расчета

⇒ Ввести исходные данные M, N, вектор-столбец сопротивлений ветвей Z, вектор задающих токов нагрузки J, вектор ЭДС ветвей $E_В$.

⇒ Сформировать диагональную матрицу сопротивлений $Z_В$, используя встроенную функцию $Z_В = \mathrm{diag}(Z)$.

⇒ Рассчитать промежуточную матрицу $H = N \cdot Z_В$, матрицу контурных ЭДС $E_К$.

⇒ Сформировать блочные матрицы коэффициентов A и свободных членов уравнения F, используя встроенную функцию $stack$, например:

$$A := \text{stack}(M, H).$$

⇒ Рассчитать токи в ветвях схемы по обобщенному уравнению состояния через обратную матрицу коэффициентов.

• Определить параметры установившегося режима для расчетной схемы (рис. 4.1) по уравнению узловых напряжений в линейной форме.

Алгоритм расчета

⇒ Рассчитать матрицу узловых проводимостей по $Y_{\text{у}} = M Y_{\text{В}} M^T$.

⇒ Определить уровни напряжений в узлах по (4.7), либо используя (4.5) и (4.6), $U_{\text{б}} = 10{,}5$ кВ.

⇒ Расчет падений напряжений в ветвях схемы по (4.8).

⇒ Определение токов в ветвях схемы по (4.9).

• Сравнить результаты расчета – токи в ветвях схемы, полученные по **Модели 1** и **Модели 2.**

2. Расчет установившегося режима по линейным моделям для сети переменного тока.

• Определить параметры установившегося режима для расчетной схемы (рис. 4.1), по уравнению узловых напряжений в линейной форме. Исходные данные по вариантам приведены в табл. 4.1. Расчет провести с учетом единиц измерения параметров.

Алгоритм расчета

⇒ Ввести исходные данные *M*, вектор-столбец сопротивлений ветвей *Z*(Ом), вектор задающих токов нагрузки *J*(кА), $U_{\text{б}} = 220$ кВ.

⇒ Сформировать диагональную матрицу проводимостей ветвей в сименсах

$$Y_{\text{В}_{i,i}} = \frac{1}{Z_i}, \text{ где } i := 1 \ldots 7.$$

⇒ Сформировать матрицу проводимостей ветвей, связывающих узлы схемы с балансирующим $Y_б$ в сименсах.

⇒ Рассчитать матрицу узловых проводимостей в сименсах.

⇒ Рассчитать напряжения в узлах схемы в киловольтах.

⇒ Определить модуль и фазу напряжений в киловольтах и градусах.

⇒ Рассчитать вектор падений напряжения в ветвях схемы в киловольтах.

⇒ Рассчитать токи в ветвях схемы в килоамперах (кА).

⇒ *Осуществить проверку результатов по балансу токов*: сумма задающих токов должна быть равна току балансирующего узла с обратным знаком. Ток балансирующего узла равен алгебраической сумме токов ветвей, связанных с узлом $Б$ с учетом их направления.

Таблица 4.1- Варианты индивидуальных заданий

№	Сопротивления ветвей, Ом											Задающие токи, кА								δ
	$Z1$	$Z2$	$Z3$	$Z4$	$Z5$	$Z6$	$Z7$	$Z8$	$Z9$	$Z10$	$Z11$	$J1$	$J2$	$J3$	$J4$	$J5$	$J6$	$J7$	J8	
1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	0.8	0.2	0.4	0.7	0.9	0.1	3	4	6	8	9	11	6	9	π/3
2	0.3	0.2	0.5	0.6	0.7	0.8	0.2	0.4	0.6	0.9	0.1	3	5	6	7	9	11	5	9	π/4
3	0.3	0.4	0.8	0.9	0.5	0.7	0.6	0.3	0.7	0.2	0.1	2	3	5	8	6	3	7	1	π/6
4	0.2	0.5	0.7	0.9	0.6	0.4	0.3	0.6	0.9	0.3	0.8	3	2	5	7	3	4	7	6	π/3
5	0.2	0.4	0.3	0.5	0.3	0.6	0.4	0.5	0.8	0.2	0.7	2	3	6	8	4	9	6	1	π/6
6	0.5	0.3	0.6	0.9	0.7	0.8	0.5	0.4	0.6	0.4	0.2	3	5	4	8	6	5	9	6	π/4
7	0.2	0.3	0.4	0.8	0.3	0.5	0.8	0.5	0.6	0.9	0.2	8	3	4	6	5	9	7	2	π/6
8	0.3	0.5	0.4	0.5	0.6	0.9	0.8	0.5	0.7	0.8	0.7	3	8	6	4	9	10	6	8	π/3
9	0.1	0.5	0.3	0.5	0.4	0.1	0.2	0.3	0.7	0.6	0.1	2	4	3	5	6	9	7	10	π/4
10	0.2	0.3	0.5	0.6	0.8	0.2	0.3	0.4	0.9	0.6	0.7	3	5	4	5	6	8	9	4	π/6

$U_б = 10{,}5$ кВ, $S_б = 7$ МВА, $E_q = 1.07$, $U_c = 1$, $P_d = 60$, $T_j = 14$ с, $x_d = 1.7$, $x'_d = 0.172$, $T_{d0} = 7.26$.

5. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Цель работы. Изучить основы применения пакета MathCAD при построении простейших моделей.

5.1. Краткие теоретические сведения

Переменные величины, входящие в математическую модель, различают по нескольким признакам.

По роли, которую переменные играют по отношению к объекту моделирования. На рис. 5.1 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор входных переменных, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – вектор выходных переменных. В связи с разделением переменных на входные и выходные рассматриваются прямые и обратные задачи исследования объекта по его математической модели. В прямых задачах по данным о выходах объекта исследуется его поведение в различных условиях (режимах работы), т. е. входные переменные, структура и параметры модели относятся к исходным данным, а выходные переменные представляют результат исследования: $Y = f(X)$ *или* $F(X, Y) = 0$, где известны характеристики X и f или F.

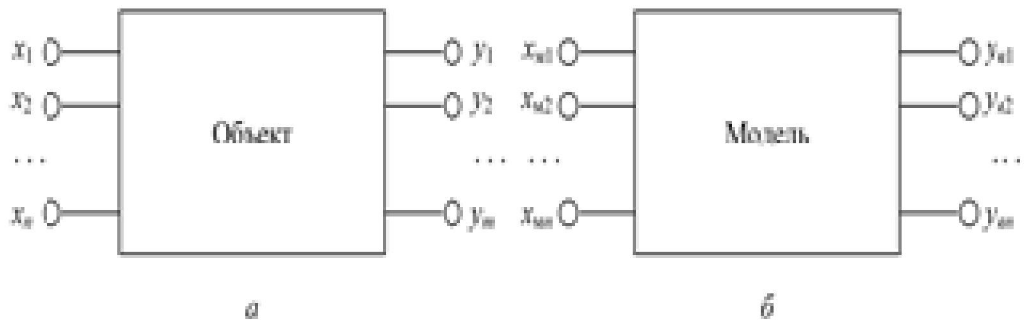


Рис. 5.1 - Переменные в объекте и его модели

В обратных задачах считаются известными X и Y (доступны для измерения и исследования), а определению подлежат неизвестные структура и параметры модели (f или F). Такие задачи называют задачами идентификации.

Входные переменные разделяют на управляемые (управляющие воздействия) и неуправляемые (возмущения) Первые позволяют выполнять регулирование режима работы объекта, а вторые меняются самопроизвольно, например погодные условия.

По подверженности воздействию случайным факторам. Детерминированная (определенная) переменная означает, что для нее исключено влияние случайных факторов – она задается вполне определенным значением или меняется во времени по определенному закону. Некоторые переменные по своей природе или по влиянию на них случайных факторов являются случайными величинами. Процесс изменения такой величины во времени называется случайным или стохастическим процессом. К этим переменным можно отнести мощность нагрузки тяговой подстанции, которая зависит от загрузки контактной транспортной сети, или величину активного сопротивления провода ЛЭП, в большой степени подверженного влиянию температуры окружающей среды.

В основе описания случайных переменных лежат методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики.

По свойствам непрерывности и дискретности. Изменения непрерывных переменных во времени описываются непрерывными функциями, которые могут принимать континуальное множество значений в некоторых практически всегда имеющихся пределах (рис. 5.2, а). Непрерывность, порожденная инерционностью материальных систем, является их неотъемлемым свойством. Однако на практике возможности разрешения близких значений функций и ее аргументов всегда ограничены; для каждого конкретного случая можно указать определенную область, в пределах которой эти значения становятся неразличимыми для наблюдателей или инструментальных средств. Очевидно, что такую область достаточно характеризовать единственным значением, что приводит к понятию дискретных переменных (рис. 5.2, б, в, г).

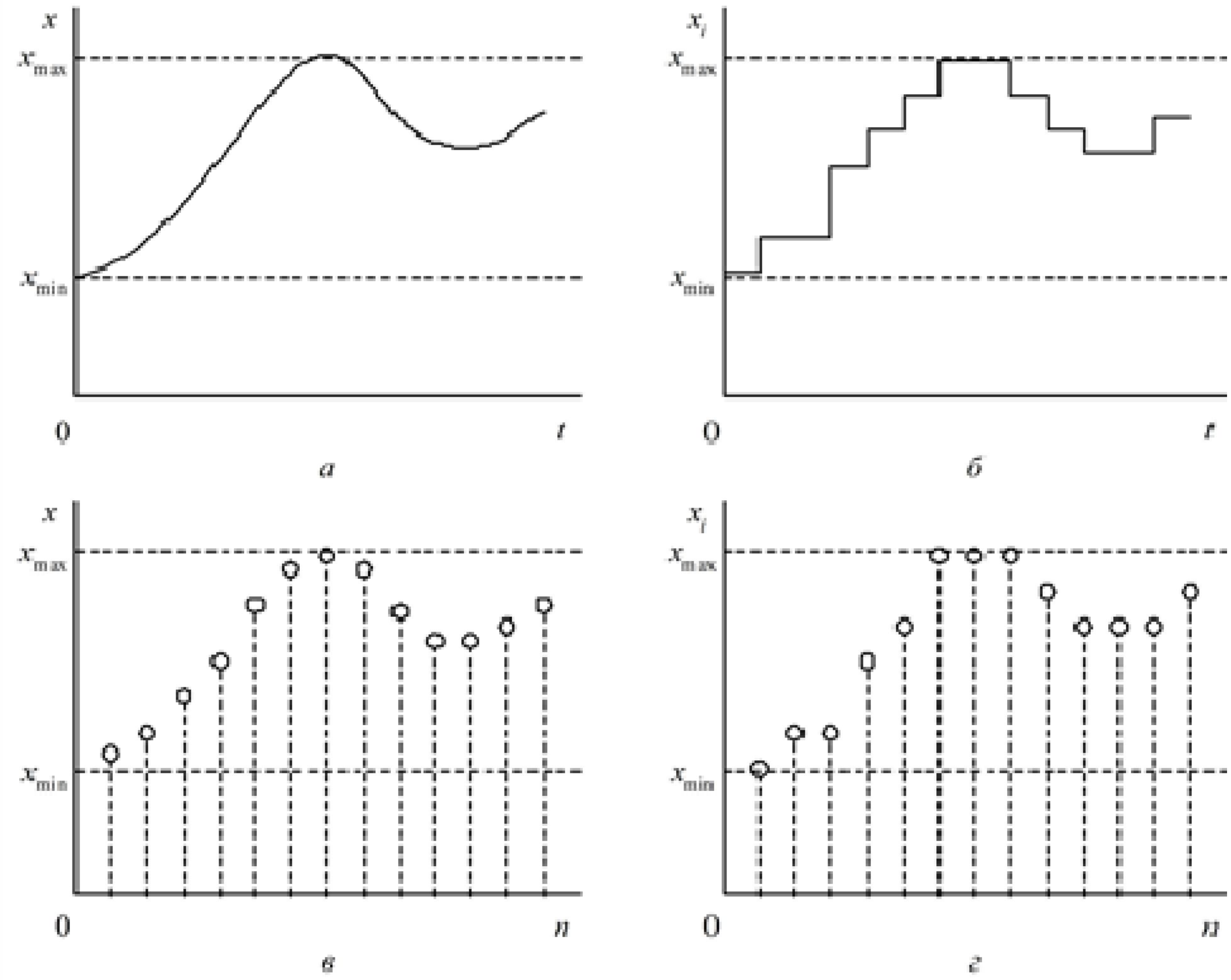


Рис. 5.2 - Виды переменных по свойствам непрерывности и дискретности

Дискретные переменные подразделяются на три типа:

1) дискретные относительно значений переменной (рис. 5.2, б);

2) дискретные относительно времени (рис. 5.2, в);

3) дискретные относительно значений переменной и относительно времени (рис. 5.2, г).

Множество дискретных значений, которые принимает переменная, как правило, является конечным: положение выключателя (включено, выключено), количество включенных генераторов на электростанции (0, 1, 2, ...), значения целых чисел, представленных в цифровой вычислительной машине (например, от –32 768 до +32 767). С помощью дискретных переменных относительно значений удобно представлять некоторые процессы (графики нагрузок или напряжений по часам суток или месяцам года), распределение вероятностей (гистограмма) и т. п.

Дискретность во времени связана с отсчетом или замером переменных в отдельные дискретные моменты времени. Так, в автоматизированных системах управления измерения переменных выполняются с заданной периодичностью, например, через каждые 5 минут.

Дискретность по времени и по значению дополнительно к измерениям в отдельные моменты времени предполагает использование дискретных значений переменных.

По способу получения переменные подразделяются на наблюдаемые и ненаблюдаемые.

Главное свойство наблюдаемых переменных – доступность для наблюдения. Однако наблюдаемость сама по себе еще не обеспечивает возможности полного исследования и описания переменной. Необходимо, чтобы последняя обладала еще свойством измеримости, т.е. возможностью построения для исследуемой величины метрики. Этому требованию удовлетворяют непосредственно измеряемые переменные. Они представляют собой количественные характеристики свойств и параметров всевозможных материальных объектов и процессов (напряжение, ток, скорость, линейные размеры и пр.), которые определяются на основе прямого измерения, т.е. сравнения с мерой, обеспечены средствами измерения и охвачены существующей системой метрологического обеспечения.

Тесно связан с непосредственно измеряемыми и следующий класс переменных – *косвенно измеряемые*.

Косвенно измеряемая переменная x сама по себе не является объектом измерения, а часто и в принципе не может быть непосредственно измерена.

Вместо нее непосредственному измерению подвергаются другие, вспомогательные переменные $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, которые связаны с исследуемой переменной функциональной зависимостью x = $f(\alpha, \beta, \gamma,\ldots)$. Это позволяет вычислить значение искомой переменной по результатам прямых наблюдений вспомогательных величин, например, вычислить объем тела по результатам измерения его линейных размеров. При испытаниях силовых трансформаторов в электрических сетях температуру его обмоток определяют методом измерения их сопротивлений постоянному току, т.е. температура – косвенно измеряемая переменная.

К косвенно измеряемым переменным относят такие искусственно сконструированные идеальные образования, которые вообще не наблюдаемы: математическое ожидание, дисперсия, энтропия и др.

Существует класс переменных, которые при их количественном оценивании не имеют материальной эталонной базы и находятся вне сферы метрологии. К ним относятся все виды непосредственно или косвенно измеряемых переменных, приведенных к безразмерной форме и выраженных в относительных единицах. Например, некоторые величины материальной природы (интенсивность сейсмических явлений, интенсивность облачности в метеорологии, твердость материалов по Бринеллю и некоторые другие), а также искусственные идеальные конструкции, характеризующие в количественном отношении сложные и массовые объекты и явления (рентабельность, прибыль, эффективность и др.). Такие переменные называют условно измеряемыми, так как меры или единицы измерения, используемые при их количественном оценивании, носят конвенционный характер.

Существует еще один класс наблюдаемых переменных – условно количественно оцениваемые. Они представляют сложные многофакторные явления, интенсивность которых может быть различной, но для количественного оценивания этой интенсивности не удается ввести ни объективной единицы измерения, ни способа измерения. Однако в целом ряде случаев между интенсивностями рассматриваемого явления удается установить отношение порядка (равны – не равны, больше – меньше и т. д.), а затем отобразить эти отношения, вообще говоря, произвольным образом на некоторое множество (систему) чисел. Результатом такой процедуры являются, например, численные оценки качества усвоения учащимися и студентами учебного материала, степень удовлетворения работой членов некоторого производственного коллектива, степень качества исполнения музыкального произведения или выполнения спортивного упражнения. Условное количественное оценивание основано на опыте и интуиции и по сути своей субъективно.

Ненаблюдаемые переменные подразделяют на принципиально ненаблюдаемые и технически ненаблюдаемые.

Принципиально ненаблюдаемые переменные не существуют как компоненты реального мира и поэтому поддаются определению только косвенными методами, в частности на основе косвенных измерений (статистические характеристики).

Технически ненаблюдаемые переменные характеризуют такие материальные явления, которые либо не обеспечены техническими средствами, необходимыми для измерения и оценивания, либо протекают в условиях, когда инструментальный доступ к ним невозможен. Характерным примером переменной, не наблюдаемой из-за практической недоступности, является количество угля для помола в шаровой мельнице на электростанции.

Каждая переменная, связанная с материальным объектом, может изменять свои значения лишь в некоторых конечных пределах, которые обусловлены физическими свойствами объекта и характером решаемой задачи. Данные об этих пределах – ограничения на переменные – существенны при построении и использовании всех видов моделей, а в оптимизационных задачах, где необходимо найти оптимальное значение так называемой целевой функции, ограничения являются главной частью самой модели.

С математической точки зрения различают ограничения типа простых неравенств: $X_{min} \le X \le X_{max}$, $Y_{min} \le Y \le Y_{max}$ – параллепипедные ограничения и функциональные ограничения, фиксирующие предельные значения некоторой величины в функции от других переменных: $f_{min}(X) \le Z \le f_{max}(X)$ и т. п.

В практике моделирования выделяют так называемые жесткие ограничения, которые являются абсолютными (например, угол поворота лопатки турбины – «до упора»), и ограничения мягкие, допускающие кратковременные нарушения установленной границы значений переменной (например, верхнего предела рабочего напряжения на электродвигателе).

В общем случае данные об ограничениях на переменные входят в состав модели как обязательная составная часть.

Технические объекты имеют самые разнообразные внутренние свойства и взаимодействия с окружающим миром. Рассмотрим внутренние свойства объектов моделирования, которые необходимо учитывать при построении моделей.

Под структурой объекта обычно понимают совокупность элементов, входящих в состав объекта, и связей между ними. Структура математической модели – это совокупность переменных и параметров, записанных в математическом выражении, например,

$$z = ax^2 + bx + cy^2 + dy + exy.$$

Здесь переменными являются величины x, y и z, а параметрами – коэффициенты a, b, c, d, e.

Параметры – это количественные характеристики внутренних свойств объекта, которые отражаются его структурой, а в математической модели они являются коэффициентами, входящими в математическое выражение.

Рассмотрим свойства объектов с точки зрения моделирования.

1) Непрерывность и дискретность

Подавляющее большинство различных технических объектов имеет свойство непрерывности переменных, т. е. свойство принимать несчетное множество сколь угодно близких значений. Состояния этих объектов описываются макроскопическими физическими величинами: температурой, скоростью, давлением, пространственными координатами, электрическим током и т. п. Математические структуры, адекватно описывающие такие объекты, очевидно, тоже должны быть непрерывными. Поэтому при модельном описании объектов с непрерывными переменными используют главным образом аппараты дифференциальных и интегральных уравнений, передаточные функции, частотные характеристики и др.

Дискретные переменные могут принимать некоторое, практически всегда конечное, число наперед заданных значений. Характерными примерами объектов с дискретными переменными являются релейные переключательные схемы, коммутационные системы АТС, цифровые вычислительные машины. Основой формализованного описания объектов с дискретными переменными является аппарат математической логики. Дискретные методы анализа в настоящее время получили широкое распространение для описания и исследования объектов с непрерывными переменными. При этом вследствие конечности разрядной сетки ЦВМ значения непрерывных величин округляются до дискретных значений, а исходные дифференциальные уравнения в частных производных заменяются эквивалентными конечно-разностными. В отличие от моделей с дискретными переменными по своей сути модели с непрерывными переменными, представленные дискретно, называют *дискретизированными.*

2) Стационарность и нестационарность

Строго говоря, какие-то изменения имеют место в любом реальном объекте, однако в тех случаях, когда они настолько малы, что могут не учитываться при моделировании, объект рассматривается как стационарный. Стационарность предполагает неизменность и структуры, и параметров объекта. Поэтому стационарный объект описывается математическим выражением, которое включает в себя только постоянные коэффициенты [4].

Нестационарные объекты имеют в общем случае изменяющиеся во времени структуру и параметры.

В технических объектах приходится сталкиваться с нестационарностью как структуры, так и параметров объекта. Так, например, в электроэнергетической системе в течение времени отключаются и включаются отдельные элементы (линии, трансформаторы, генераторы) и изменяются их параметры в зависимости от различных внешних факторов (температура, влажность, старение изоляции и др.).

Принципиальных затруднений учет нестационарности относительно параметров в математическом описании объекта не вызывает, хотя усложняет модель и ее исследование. В тех случаях, когда появляется необходимость исследовать объекты переменной структуры, общую нестационарную задачу, как правило, расчленяют на ряд стационарных относительно структуры подзадач, решения которых отыскивают отдельно, а затем объединяют в одно.

3) Распределенность и сосредоточенность параметров

В пространственно протяженных объектах, в частности включающих в себя непрерывные среды (газы, жидкости, твердые среды), когда время распространения физических, например колебательных явлений, оказывается соизмеримым с инерционными эффектами, адекватное описание процессов требует учета как временных, так и пространственных координат. Объекты такого рода, средством описания которых служат дифференциальные уравнения в частных производных, относятся к классу объектов с распределенными параметрами. С математической точки зрения объекты с распределенными параметрами представляют собой поле, существующее в пространственно-временном континууме, а переменные соответствующих моделей в общем случае суть функции времени и пространственных координат. Типичными примерами одномерных объектов с распределенными параметрами служат всевозможные «длинные линии»: проводные линии связи, длинные трубопроводы, линии электропередачи на большие расстояния. Примерами моделей двухмерного объекта с распределенными параметрами являются сечения различных трубопроводов, кабелей, проводов, где рассматриваются в плоскостях поля температур, плотностей и напряженностей.

И, наконец, пространственное электромагнитное поле с его математической моделью – уравнениями Максвелла – представляет собой классический пример трехмерного объекта с распределенными параметрами.

Если пространственной протяженностью можно пренебречь и считать, что независимой переменной протекающих в нем процессов является только время, принято говорить об объекте с сосредоточенными параметрами. К числу таких объектов, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, относится подавляющее большинство механизмов, машин, устройств, а также все системы, у которых расстояния между отдельными элементами практически не влияют на исследуемые свойства.

Математический аппарат, строго описывающий объекты с распределенными параметрами, существенно сложнее, чем аппарат объекта с сосредоточенными параметрами. Поэтому на практике всегда, где это возможно, прибегают к аппроксимации, т. е. заменяют распределенные параметры на сосредоточенные, например, разбивая пространство на небольшие элементы (подпространства) или делая корректировку сосредоточенных параметров.

4) Одномерные и многомерные объекты

Обычно под количеством измерений понимают число выходов (выходных переменных). Для моделирования многомерных объектов используют векторно-матричное представление.

5) Статические и динамические объекты

Статические объекты находятся в «застывшем» состоянии или рассматриваются в какой-либо момент времени безотносительно того, каким было его состояние в прошлом или будет в будущем. Динамика рассматривает причинно-следственные цепочки и возможность прогнозирования будущих состояний объектов. Каждый динамический объект имеет свойство последствия (инерции) – состояние движущегося тела в некоторый момент времени определяется не только силами, действующими в тот момент, но и предшествующими воздействиями: состояние объекта имеет предысторию его движения. В дифференциальных уравнениях предыстория объекта задается начальными условиями.

Развитие механики пространственных протяженных сред, а также теории колебаний и волн выявило еще один источник последствия, не связанный непосредственно с инерционными эффектами. Речь идет о конечной скорости распространения механических возмущений, например колебательных в сплошной среде, результатом чего является зависимость текущего состояния некоторой точки от прошлых состояний других точек и, следовательно, объекта в целом.

Нельзя связывать последствия только с традиционными представлениями об инерционных эффектах. Явление последствия имеет более общий характер. Существуют и другие физические явления, например резонанс и запаздывание в каналах связи, которые дают последствия в материальных объектах. Существуют также информационные запаздывания в управляемых системах.

Н. Винер ввел обобщенное представление о зависимости между входной и выходной переменными произвольного объекта в форме

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{A}}\left[\mathbf{u}\left(t_i \,\middle|\, t\right)\right], \quad t_0 \le t \le t_i ,$$

где $u(t)$, $x(t)$ – вектор-функции входов и соответственно выходов;

$\hat{\mathbf{A}}$ – обобщенный оператор объекта;

$t_i - t_0 = \theta$ – интерпретируемый как внутренняя память объекта интервал времени, в пределах которого прошлые состояния объекта влияют на текущее значение $x(t_i)$. При этом очевидно, что условием физической реализуемости объекта является неравенство $t \le t_i$, ибо следствие (выход) в реальной системе не может предшествовать причине (входу). θ варьируется в переделах от 10^{-9} до десятков и сотен лет (табл. 5.1).

Таблица 5.1 - Время внутренней памяти объекта

Тип системы (объекта)	**Единица измерения**	**Порядок**
Радиоэлектронные системы	с	10^{-3} … 10^{-9}
Механические и электромеханические системы (машины, агрегаты, генераторы и др.)	с	10^{-2} … 10
Крупные транспортные системы (суда, ж/д транспорт, нефте- и газопроводы)	мин	1 … 10
Крупные термические агрегаты (металлургические печи, котлы)	ч	1 …10^{2}
Производственно-экономические системы	Месяцы	10^{1} …10
Крупные производственно-экономические системы	Месяцы, годы	–
Крупные экосистемы, биосферные процессы	Годы, десятилетия	–
Массовые социально-психологические явления (ценностные установки, убеждения, мировоззрения)	Столетия	–

б) Виды физических объектов

Рассматривая объекты моделирования, часто ограничиваются исследованием физических свойств одного рода: тепловых, электрических, магнитных, механических и т. д. Но в тех случаях, когда в объекте происходит передача или преобразование энергии, требуется учет свойств различного рода, например электромагнитных, теплоэлектрических, тепломеханических, электромеханических и др.

Математический аппарат, используемый для моделирования различных физических систем, может оказаться одинаковым. Так, например, вращательная механическая система и электрическая цепь с источником ЭДС и конденсатором описываются одинаковыми с точки зрения математики уравнениями.

Пример 1. Построение модели колебательного процесса с затуханием *c* и частотой ω. Модель решена в MathCAD в блоке Given оператором *Odesolve*. Начальные условия: $x(0)=0{,}5$, $x^{I}(0)=0$.

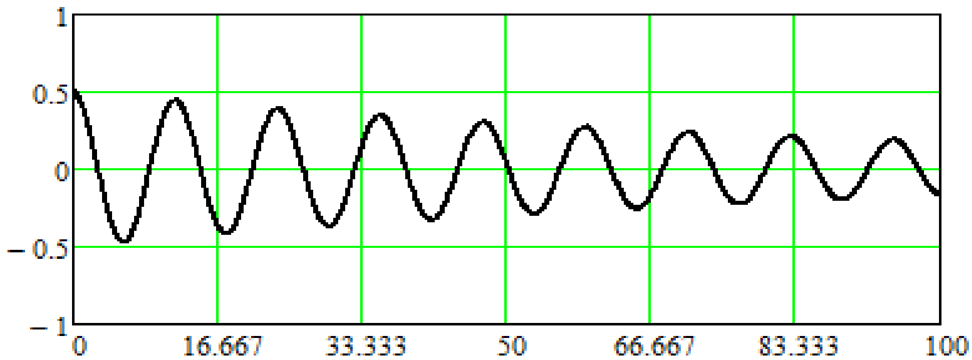
$\beta := 0.01 \qquad \omega := 100$

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\beta\cdot\frac{d}{dt}x(t) + \omega^2\cdot x(t) = 0$$

$x(0) = 0.5 \qquad x'(0) = 0$

$x := \mathrm{Odesolve}(t, 500)$



Пример 2. Модель случайного движения частице. Модель построена с использованием генератора случайных чисел, задаваемого оператором *rnd.*

Временная развертка процесса осуществляется оператором счетчика кадров *FRAME,* с использованием опций панели задач *Tools – Annimation – Record.*

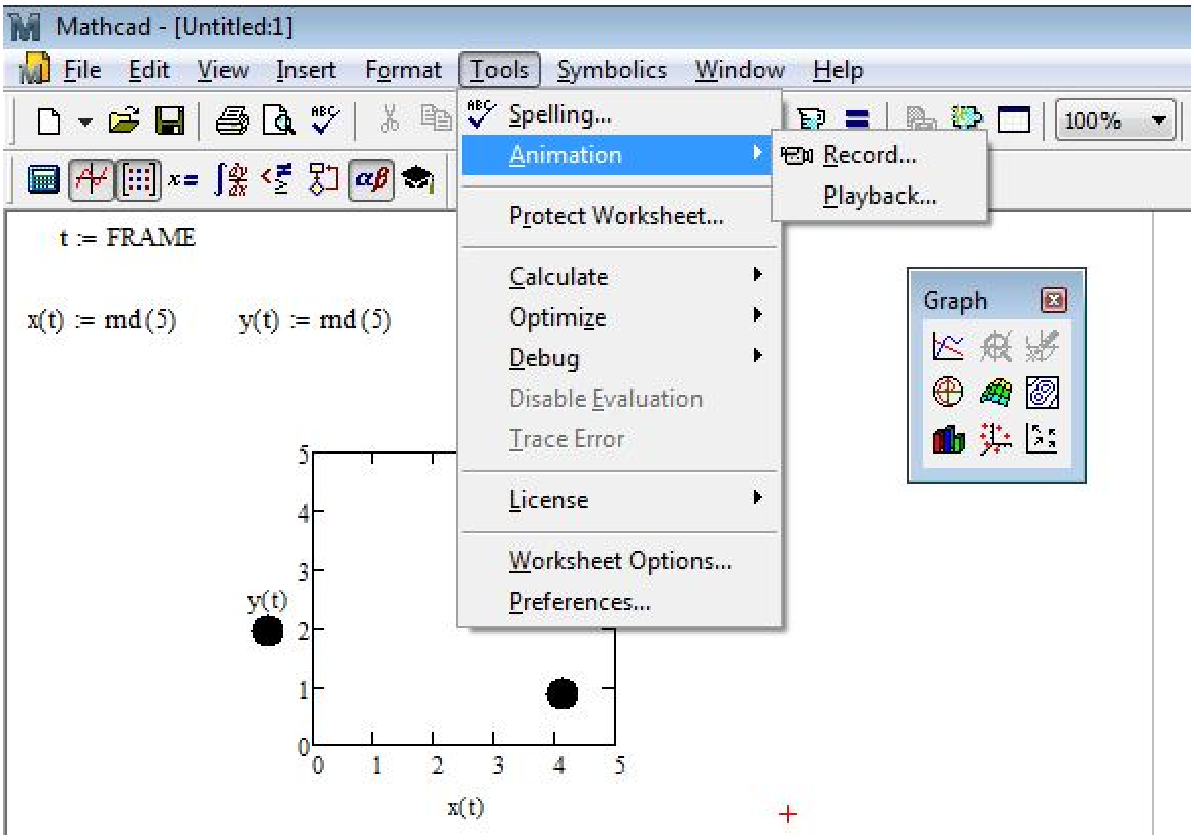


Рис. 5.3 - Панель задач *Tools – Annimation – Record*

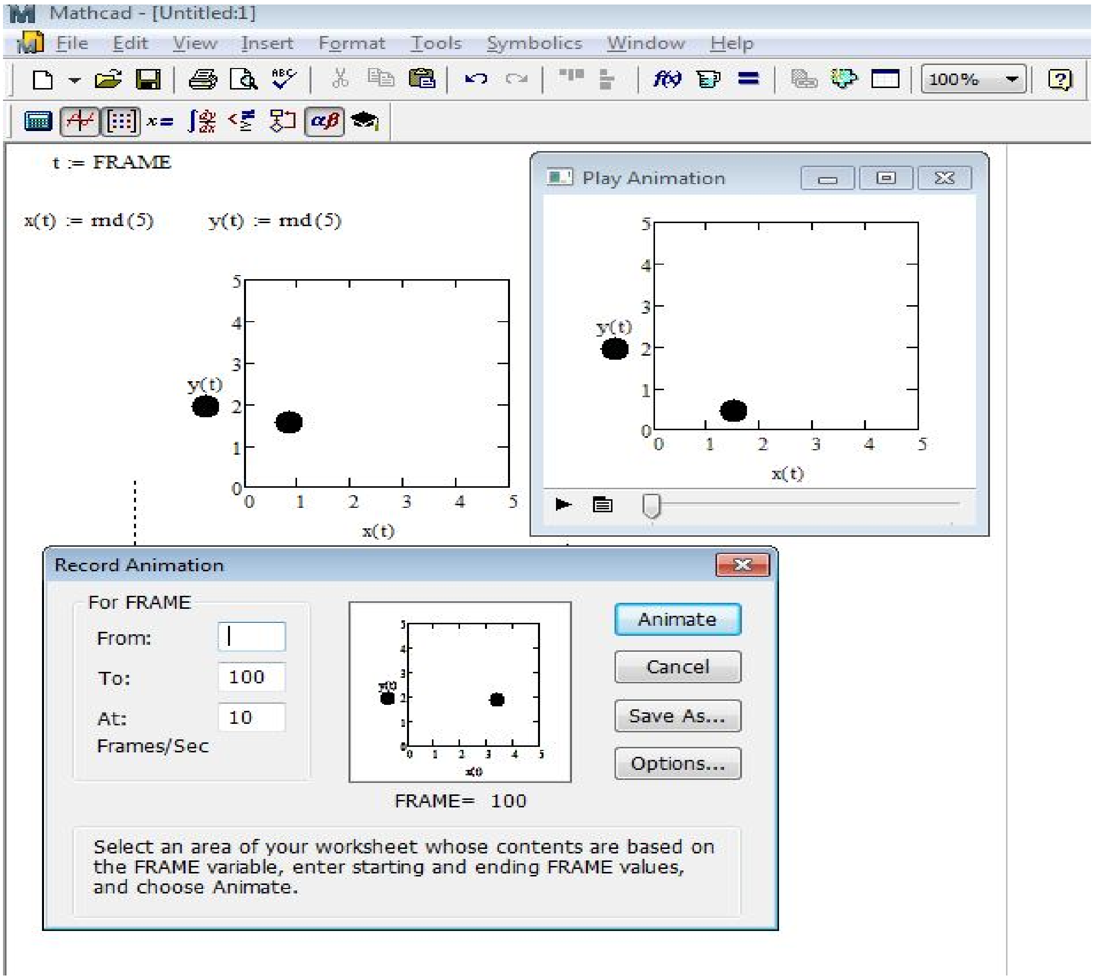
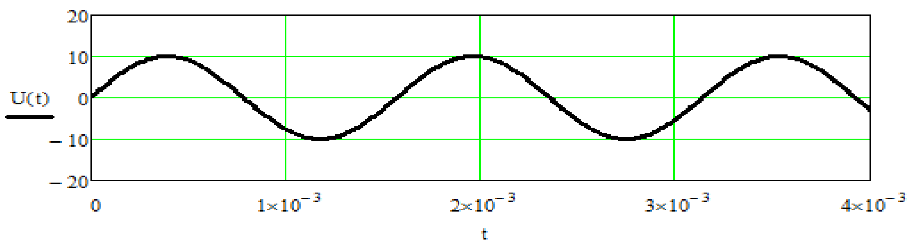


Рис. 5.4 – Пример использования оператора счетчика кадров *FRAME*

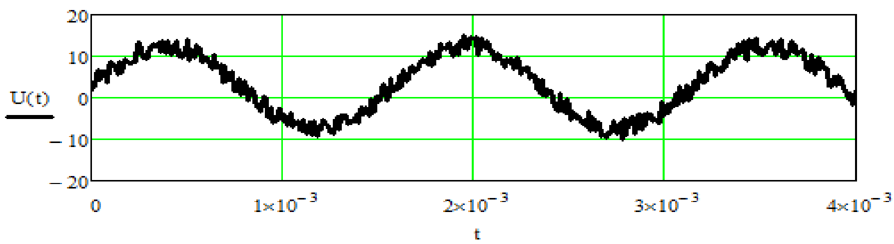
Пример 3. Технология «зашумления» сигнала.

$t := 0, 0 + 0.00001 .. 0.05$ $u(t) := rnd(5)$

$U(t) := 10 \cdot \sin(4000 \cdot t)$ Синусоидальный сигнал



$U(t) := 10 \cdot \sin(4000 \cdot t) + u(t)$ Сигнал с помехой



Пример 4. Модель цепи переменного тока в переходном режиме. Нахождение величины ударного тока и постоянной времени.

Дано: Um=220 В, L=4 Гн, R=5 Ом. Построить модель последовательной RL-цепи и найти величину ударного тока в цепи в зависимости от времени коммутации.

Решение в пакете MathCAD.

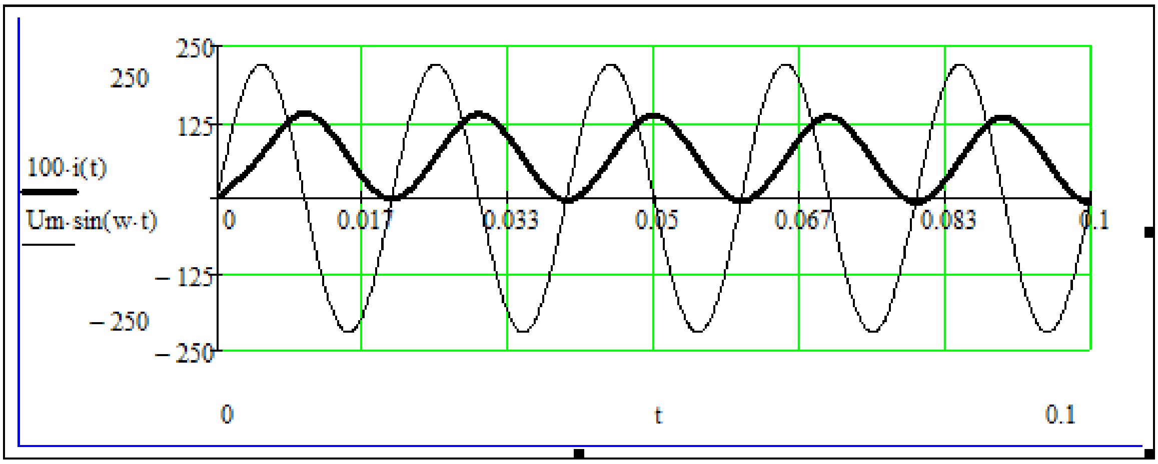
$\beta := 0.01 \qquad \omega := 100 \qquad R := 5 \qquad L := 4 \qquad Um := 220 \qquad w := 314$

Given

$$\frac{d}{dt}i(t) + \frac{R}{L}\cdot i(t) = Um\cdot \sin(w\cdot t)$$

$$i(0) = 0$$

$$i := \mathrm{Odesolve}(t, 5)$$



6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЭС

Цель работы. Применение сосредоточенных математических моделей макроуровня для анализа статической устойчивости энергосистем.

6.1. Краткие теоретические сведения

При проектировании и эксплуатации электроэнергетических систем решается задача анализа статической устойчивости.

Под устойчивостью понимается [1, 7] способность системы возвращаться в исходное или близкое к исходному состояние равновесия после малого возмущающего воздействия. Такого типа устойчивость называется статической либо устойчивостью в «малом» и является необходимым условием работоспособности любой технической системы.

При анализе электрической системы *состоянию равновесия* соответствует *нормальный установившийся режим.* В качестве *малых возмущающих воздействий* можно рассматривать, например, подключение или отключение потребителей, которые приводят к изменению параметров системы во времени и возникновению переходных процессов.

Анализ статической устойчивости, основанный на методе малых колебаний [4, 6], включает в себя следующие этапы.

1. *Допускается малое возмущение* относительно исходного состояния равновесия. Под воздействием малого возмущения в электрической системе возникают переходные процессы, которые описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

2. Составляются *дифференциальные уравнения переходного процесса*. Для широкого класса технических систем при анализе переходных процессов используются системы дифференциальных уравнений вида [1]:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{d^2x_i}{dt^2}+b_{ij}\frac{dx_i}{dt}+c_{ij}x_i\right)=F_j(t), \qquad (6.1)$$

где $j=1\ldots n$; a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – постоянные коэффициенты;

$x_i(t)$ – переменные, характеризующие реакцию системы на малое возмущение;

$F_j(t)$ – внешние силы, отражающие изменение условий работы системы.

Реакция системы на возмущающее воздействие $x_i(t)$ может быть представлена как совокупность вынужденной $x_{\text{вын}\ i}(t)$ и свободной $x_{\text{св}\ i}(t)$ составляющих. При этом для анализа устойчивости определяющее значение имеет характер изменения свободной составляющей, т. е. характер возникающих в системе свободных колебаний, который определяется внутренними свойствами системы.

Положение равновесия является асимптотически устойчивым, если выполняется условие затухания во времени свободных колебаний:

$$\lim_{t\to\infty} x_{\text{св}\ i}(t)=0. \qquad (6.2)$$

3. *Анализ характера переходных процессов*. Как правило, дифференциальные уравнения, описывающие переходные процессы в технических системах, не линейны вследствие нелинейности физических закономерностей, связывающих параметры режима электрической системы. Для упрощения анализа при малых отклонениях все нелинейные функции линеаризуются. Считая, что возмущающее воздействие незначительно во времени и отклонения параметров режима от исходных значений $\Delta x_i(t)$ малы, можно перейти к дифференци-

альным уравнениям, линейным относительно $\Delta x_i(t)$. Для анализа изменения во времени свободной составляющей $\Delta x_i(t)$ в общем случае необходимо решить дифференциальное уравнение n степени:

$$a_0 \frac{d^n \Delta x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \Delta x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n \Delta x = 0 \,. \tag{6.3}$$

Используя операторный метод, можно перейти от дифференциального уравнения (6.3) к характеристическому уравнению:

$$D(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \,. \tag{6.4}$$

Дальнейшее исследование переходных процессов, возникающих в электрической системе, определяется видом корней характеристического уравнения (6.4) .

На основе ***теоремы Ляпунова*** положение равновесия является статически устойчивым, если все корни характеристического уравнения (6.4) имеют отрицательную вещественную часть; неустойчивым, если хоть один корень уравнения (6.4) имеет положительную вещественную часть.

Возможны *два подхода* к решению поставленной задачи.

- При степени характеристического уравнения $n = 2$ определяются корни уравнения (6.4) и устойчивость системы анализируется на основе теоремы Ляпунова, далее определяется характер изменения во времени свободной составляющей $\Delta x_i(t)$.
- При степени характеристического уравнения $n \geq 3$ об устойчивости системы судят без непосредственного решения характеристического уравнения (6.4), используя *критерии устойчивости.*

Критерии устойчивости. Анализ статической устойчивости электрических систем путем прямого отыскания корней характеристического уравнения связан с практическими трудностями, поскольку отсутствуют аналитические выражения для корней уравнений выше четвертого порядка. Однако для суждения об устойчивости системы достаточно знать то, что все корни расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости и имеют отрицательную вещественную часть.

Определение. Условия, которые позволяют судить о наличии отрицательной вещественной части всех корней характеристического уравнения без его непосредственного решения, называются *критериями устойчивости.* Критерии устойчивости подразделяются на алгебраические и частотные.

Алгебраический критерий Гурвица

Для использования критерия Гурвица составляется *определитель Гурвица* по следующим правилам:

- по главной диагонали располагаются коэффициенты уравнения (6.4) в порядке возрастания индексов начиная с a_1;
- построчно помещаются коэффициенты только с четными или только с нечетными индексами, при этом влево от диагонали индексы уменьшаются, а вправо – увеличиваются;
- все недостающие коэффициенты заменяются нулями.

Например, для характеристического уравнения $n = 3$ определитель Гурвица имеет вид:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}. \qquad (6.5)$$

Затем выделяются миноры относительно главной диагонали определителя Гурвица Δ_3 и применяется ***критерий Гурвица***: *для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы при* $a_0 > 0$ *все главные диагональные миноры определителя Гурвица были положительны.*

Условия устойчивости для Δ_3:

$a_0 > 0,$

$\Delta_1 = a_1 > 0,$

$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0,$

$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 a_0 = a_3 \Delta_2 > 0 .$

Частотный критерий устойчивости Михайлова

В основу критерия Михайлова положен принцип аргумента [1], известный из теории функций комплексного переменного.

Для применения критерия Михайлова необходимо заменить $p = j\omega$, где $\omega -$ частота свободных колебаний, и подставить в выражение (6.4). Например, для характеристического уравнения n = 3:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^3 + a_1 (j\omega)^2 + a_2 (j\omega) + a_3 = -a_0 j\omega^3 - a_1 \omega^2 + a_2 j\omega + a_3 =$$
$$= U(\omega) + jV(\omega),$$

$$U(\omega) = -a_1 \omega^2 + a_3 , \qquad (6.6)$$

$$V(\omega) = -a_0 \omega^3 + a_2 \omega = \omega(-a_0 \omega^2 + a_2).$$

Вектор $D(j\omega)$, изображенный в декартовых координатах на плоскости, при изменении $0 < \omega < \infty$ вращается и концом вектора описывает кривую, которая называется *годографом* характеристического уравнения.

Практическая формулировка критерия Михайлова: система будет устойчива, если при возрастании $0 < \omega < \infty$ годограф, начинаясь на положительной части вещественной оси, проходит последовательно в положительном направлении n квадрантов, где n – степень характеристического уравнения. Такое перемещение годографа соответствует повороту вектора характеристического многочлена $D(j\omega)$ на угол $n \cdot \frac{\pi}{2}$.

С использованием практической формулировки критерия Михайлова можно построить годографы устойчивых систем, которые имеют жесткую конфигурацию в зависимости от степени характеристического уравнения (рис. 6.1).

Таким образом, изменяя частоту свободных колебаний $0<\omega<\infty$, нужно построить годограф Михайлова, и по его конфигурации сделать вывод о статической устойчивости системы с учетом степени характеристического уравнения.

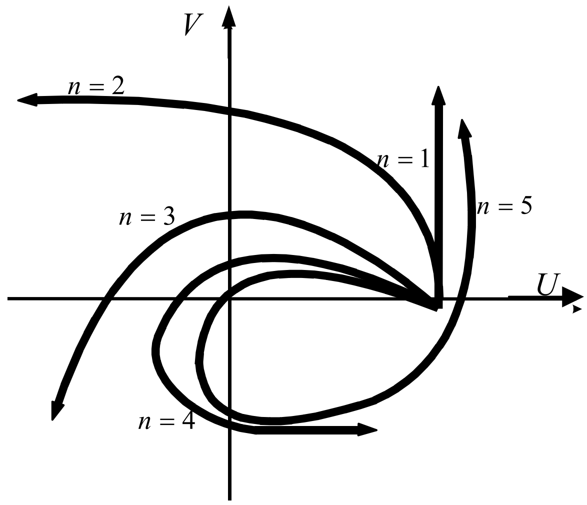


Рис. 6.1 - Годографы устойчивых систем

Имеется возможность анализа устойчивости системы по критерию Михайлова без построения годографа. Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$U(\omega=0)=a_n>0;$$

$$\frac{\partial V}{\partial \omega}(\omega=0)=a_{n-1}>0; \qquad (6.7)$$

корни уравнений $U(\omega)=0$ $V(\omega)=0$ должны быть перемежающимися (чередующимися на числовой оси).

6.2. Задание на выполнение лабораторной работы

Произвести анализ статической устойчивости системы, для которой рассчитан установившийся режим в лабораторной работе № 4, на основе линейного уравнения узловых напряжений. Исходные данные и расчетная схема приведены в работе № 4. Продолжить программу лабораторной работы № 4 (раздел 4.2) *в среде* ***Mathcad.***

Анализ статической устойчивости системы проведем при отсутствии нагрузки в узлах и подключении к узлу 5 синхронного неявнополюсного генератора. Эквивалентная схема приведена на рис. 6.2.

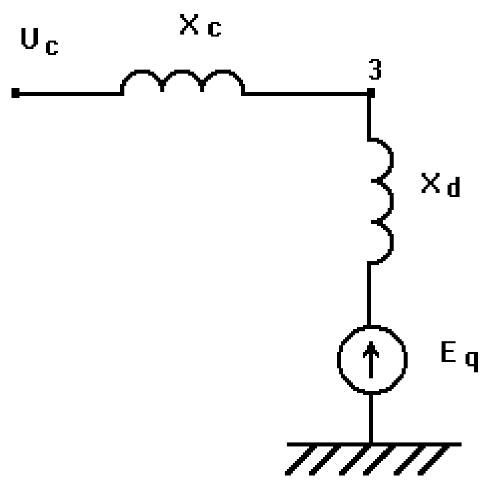


Рис. 6.2 - Эквивалентная расчетная схема

Алгоритм расчета

1. *Ввод исходных данных*

Ввести дополнительные исходные данные (значения параметров приведены в приложении 3):

E_q – *синхронная ЭДС* ;

x_d – *индуктивное сопротивление по продольной оси* ;

U_c – *напряжение системы* ; T_j – *постоянная инерции, в с*;

P_d – *коэффициент демпфирования* ;

δ – *угол между вектрами* U_c *и* E_q .

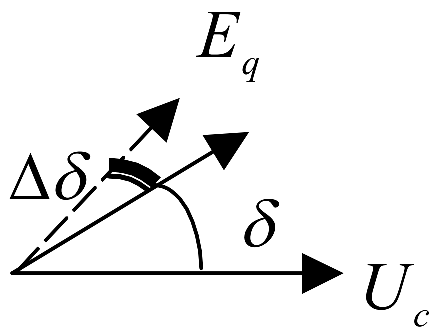


Рис. 6.3.

Для перевода в относительные единицы ввести базисные параметры:

$S_б = S_{г\ ном}, \quad U_б = U_{г\ ном};$

- перевести их в относительные единицы:

$$T_j(o.e.) = T_j(c)\omega_0 = T_j(c) \cdot 314\,; \tag{6.8}$$

- рассчитать значение эквивалентного сопротивления системы x_c, которое соответствует диагональному элементу матрицы узловых сопротивлений $Z_у$:

$$Z_у := Y_у^{-1}\,. \tag{6.9}$$

Поскольку синхронная машина подключена к узлу 5, то $x_c = Z_{у5.5}$;

- перевести эквивалентное сопротивление в относительные единицы:
-

$$x_c(o.e.) = x_c(\text{Ом}) \cdot \frac{S_б}{U_б^2}\,. \tag{6.10}$$

2. Анализ статической устойчивости по корням характеристического уравнения.

Если не учитывать переходные процессы в обмотке возбуждения генератора, но учесть демпфирующие моменты, дифференциальное уравнение относительно $\Delta\delta$ имеет вид [1, 7]:

$$Tj\frac{d^2\Delta\delta}{dt^2}+P_d\frac{d\Delta\delta}{dt}+c_1\Delta\delta=0. \qquad (6.11)$$

- Используя операторный метод $\frac{d\Delta\delta}{dt}=p$, перейти к характеристическому уравнению:

$$T_j p^2+P_d p+c_1=0. \qquad (6.12)$$

- Рассчитать коэффициент c_1 уравнения (6.12), определяется исходя из соотношения [4]:

$$c_1=\frac{E_q U_c}{x_{d_\Sigma}}\cos\,\delta,$$

(6.13)

где значение x_{d_Σ} определяется по формуле:

$$x_{d\Sigma}=x_c+x_d. \qquad (6.14)$$

- Определить значения корней характеристического уравнения (6.12) p_1, p_2, на основе *теоремы Ляпунова* сделать вывод об устойчивости системы.
- Построить график переходного процесса по выражениям:
  - если корни $p_1=\alpha_1,\ p_2=\alpha_2$ – действительные, то $\Delta\delta(t)=C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t}$;
  - если корни комплексно-сопряженные $\left(p_{1,\,2}=\alpha\pm j\beta\right)$, то

$$\Delta\delta(t) = 2Ce^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi)\text{, где } C = \sqrt{A^2 + B^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{A}{B}.$$

3. *Анализ статической устойчивости по алгебраическому критерию Гурвица.*

Если учесть не только демпфирующие моменты, но и переходные процессы в обмотке возбуждения генератора, то в этом случае характеристическое уравнение будет иметь третий порядок [1, 7].

$$D(p) = a_0 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \qquad (6.15)$$

- Рассчитать коэффициенты уравнения (6.15) исходя из соотношений [4]

$$a_0 = T_j T_d'; \qquad a_1 = T_j + P_d T_d'; \qquad a_2 = c_2 T_d' + P_d; \qquad a_3 = c_1.$$

где T_d' – *переходная постоянная времени генератора по продольной оси.*

Значение коэффициента c_1 вычисляется по (7.12), а для определения c_2 используется выражение [1, 7].

$$c_2 = c_1 + \frac{x_d - x_d'}{x_{d_\Sigma} x'_{d_\Sigma}} U_c{}^2 \sin^2\delta, \qquad (6.16)$$

где x_d' – переходное реактивное сопротивление генератора по продольной оси.

$$x'_{d_\Sigma} = x_d' + x_c. \qquad (6.17)$$

Переходная постоянная времени генератора T_d' рассчитывается из выражения:

$$T_d' = \frac{x'_{d_\Sigma}}{x_{d_\Sigma}} T_{d0}, \qquad (6.18)$$

T_{d0} – *постоянная времени обмотки возбуждения синхронной машины при разомкнутой обмотке статора.*

- Составить определитель Гурвица и рассчитать миноры определителя относительно главной диагонали.

Пример расчета определителя *из программы в среде* ***Mathcad:***

$$\Delta_3 := \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \right| .$$

- Сделать вывод об устойчивости системы по критерию Гурвица.

4. Анализ статической устойчивости по частотному критерию Михайлова.

- В выражении характеристического многочлена (6.15) заменить $p = j\omega$, где ω – частота свободных колебаний.
- Выделить из выражения $U(\omega)$ мнимую $V(\omega)$ и действительную составляющую $U(\omega)$.
- Построить график годографа Михайлова в осях $V(\omega)$ и $U(\omega)$, задавая пределы изменения $\omega := 0, 2 \cdot 10^{-2} \ldots 0.15$.
- Сделать вывод об устойчивости системы, исходя из критерия Михайлова.
- Проанализировать устойчивость по критерию Михайлова без построения годографа с учетом выполнения условий устойчивости (6.7).

7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕТАУРОВНЯ. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Цель работы. Применение математических моделей метауровня для экспериментального исследования и минимизации логических функций, синтеза и анализа логических схем технических объектов.

7.1. Краткие теоретические сведения

Математические модели и методы метауровня связаны с решением задач анализа и синтеза применительно к логике функционирования различных объектов от сложных систем до отдельных технических устройств [5, 6].

Современный уровень развития технических устройств, используемых при управлении энергосистемами, например устройств релейной защиты и автоматики, требует применения специального математического аппарата для анализа и синтеза их логических цепей, формализующего основные этапы оптимизации их логической структуры [6]. Математическое моделирование может эффективно использоваться как на этапе проектирования, так и в процессе эксплуатации, когда техническое устройство рассматривается как объект контроля, отыскания оптимальных способов проверки работоспособности и поиска неисправностей [4, 7, 9].

Любое техническое устройство дискретного действия может быть представлено как объект, моделирующий некоторую логическую функцию над набором из n аргументов, которые удобно изображать в виде разрядов двоичного числа (рис. 7.1).

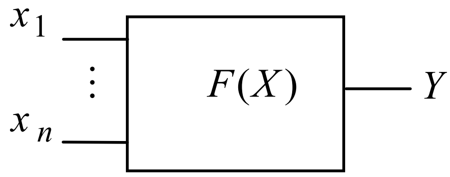


Рис. 7.1 - Модель объекта

$$Y = F(X)\,,$$

где $X = \left(x_{1,} \cdots x_n\right) \in \left\{0\ ,\ 1\right\}$ $\quad Y \in \left\{0\ ,\ 1\right\}$.

В основе формирования моделей метауровня лежит математический аппарат, описывающий действия дискретных устройств, который базируется на математической логике. Одним из основополагающих понятий в алгебре логики является логическая функция [5, 6].

Определение. Пусть задано множество наборов аргументов $X = (x_1, \ldots x_n)$, где все x_i могут принимать значения 0 или 1. Такое множество состоит из 2^n различных наборов. Предположим, что над этими наборами произведена логическая операция F, в результате которой логическая функция Y может принять одно из значений {0, 1}. При этом каждому набору X может быть поставлено в соответствие определенное значение Y.

Тогда функцией алгебры логики или булевой функцией называется однозначное отображение X в Y:

$$X \to Y\,, \qquad Y = F(x_1 \cdots x_n)\,. \tag{7.1}$$

Логическая функция может быть задана одним из трех способов:

- аналитически в виде явной зависимости (7.1), представленной с помощью логической формулы, указывающей последовательность логических операций над аргументами $x_1 \ldots x_n$;

- таблично с помощью таблиц истинности, в которых определены значения логической функции для всех возможных наборов аргументов, например:

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

- с помощью логических схем различного вида, представляющих собой условное графическое отображение логических операций.

Произвольная логическая функция, отражающая логику функционирования технического устройства, состоит из конечного числа логических переменных и знаков логических операций. Одной из наиболее распространенных является *дизъюнктивная нормальная форма* (ДНФ).

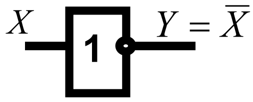
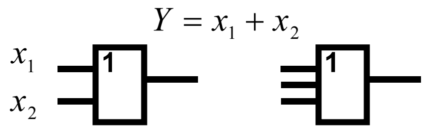
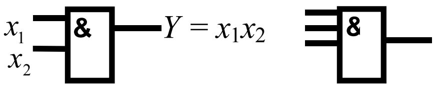
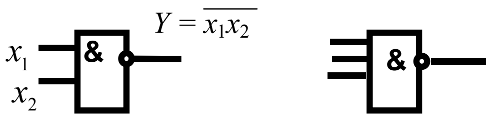
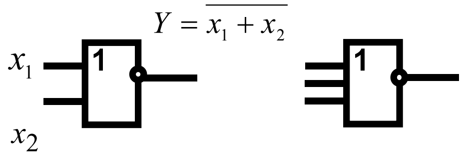
Под *дизъюнктивной нормальной формой* понимается дизъюнкция нескольких элементарных произведений, представляющих собой конъюнкции нескольких аргументов, входящих в произведение однократно без знака или со знаком инверсии.

Если каждый член ДНФ содержит все n аргументов функции, то образуется совершенная нормальная дизъюнктивная форма (СДНФ) для функции трех переменных:

$$F(X,Y,Z)=\bar{X}YZ+YX\bar{Z}+\bar{X}\bar{Y}Z+X\bar{Y}Z. \qquad (7.2)$$

Логическая функция может быть представлена с помощью набора логических операций, которые называются логическим базисом. В табл. 7.1 представлены наиболее часто используемые логические базисы.

Таблица 7.1 – Логические базисы

Логическая операция	Логический элемент
Логический базис И-ИЛИ-НЕ **операция НЕ –** отрицание (инверсия)	
Операция ИЛИ – логическое сложение (дизъюнкция)	
Операция И – логическое умножение (конъюнкция)	
Логический базис И-НЕ **Операция И-НЕ**	
Логический базис ИЛИ-НЕ **Операция ИЛИ-НЕ**	

Логическая функция в форме СДНФ не всегда содержит минимальное количество элементов и логических операций. Поэтому одним из существенных этапов при решении задач анализа и синтеза логических схем является минимизация логических функций. Это оптимизационная задача, решение которой связано с использованием математических методов и приемов, основанных на законах алгебры логики. При этом стремятся к реализации структурных логических схем, обеспечивающих минимальную стоимость устройства при условии сохранения оптимального уровня надежности.

Задачу минимизации можно решить двумя способами:

- использовать аналитические преобразования;
- применять табличный способ минимизации, например, с использованием карт Карно.

В основе минимизации логических функций лежат следующие законы алгебры логики:

- закон повторения: $X \cdot X = X$; $X + X = X$;
- закон универсального множества $X \cdot 1 = X$; $X + 1 = 1$;
- закон дополнительности $X \cdot \overline{X} = 0$; $X + \overline{X} = 1$;
- закон склеивания $X1 \cdot X2 + X1 \cdot \overline{X2} = X1$;
- закон поглощения $X1 + X1 \cdot X2 = X1$; $X1 + \overline{X1} \cdot X2 = X1 + X2$

Для перехода от одного базиса к другому используются формулы де Моргана:

$\overline{X1 \cdot X2} = \overline{X1} + \overline{X2}$; $\overline{X1 + X2} = \overline{X1} \cdot \overline{X2}$.

7.2. Задание на выполнение лабораторной работы

Решить задачи логического синтеза и анализа технических объектов с использованием программы *Electronics Workbench.* Основные приемы работы в среде *Electronics Workbench* представлены в приложении 1. Исходные данные для выполнения лабораторной работы по вариантам представлены в таблицах 7.2. 7.3.

1. Задача синтеза логических схем

а. Логика функционирования технического объекта представлена с помощью логической функции двух переменных $f(x,y)$ (таблица 7.2).

- По заданной логической функции сформировать логическую схему в базисе И-НЕ в среде *Electroncs Workbench* (*сохранить как файл F1*).
- Экспериментально получить таблицу истинности с использованием средств *Electroncs Workbench* двумя способами:

$\Rightarrow$ использовать двухпозиционные переключатели *x* и *y*, подать на вход схемы все возможные комбинации входных сигналов. Наблюдая уровни входных и выходного сигналов, *с помощью логических пробников*, построить таблицу истинности логической функции;

⇒ исследовать логическую функцию *с помощью генератора слов*. Запрограммировать генератор слов таким образом, чтобы на входе получать все возможные комбинации входных сигналов x и y. Перевести генератор слов в режим пошаговой работы нажатием кнопки STEP, последовательно подавая на вход слова из заданной последовательности входных сигналов, заполнить таблицу истинности.

Таблица 7.2 – Индивидуальные задания (логическая функция двух переменных $f(x,y)$, представляющая логику функционирования технического объекта)

Номер варианта	***Логическая функция***
1	$f(x,y)=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot y$
2	$f(x,y)=\overline{x}\cdot\overline{y}+x\cdot\overline{y}$
3	$f(x,y)=\overline{x}\cdot\overline{y}+x\cdot y$
4	$f(x,y)=\overline{x}\cdot y+x\cdot\overline{y}$
5	$f(x,y)=\overline{x}\cdot y+x\cdot y$
6	$f(x,y)=x\cdot\overline{y}+x\cdot y$

b. Логика функционирования технического объекта представлена с помощью таблицы истинности логической функции трех переменных $f(x,y,z)$ (таблица 7.3).

- По заданной таблице истинности записать выражение логической функции и минимизировать вручную с помощью карт Карно.
- По полученному минимальному выражению логической функции сформировать логическую схему в среде *Electroncs Workbench* (*сохранить как файл F2*).

- Используя логический анализатор, построить временные диаграммы и сравнить их с заданной таблицей истинности.
- Используя логический преобразователь, получить по схеме таблицу истинности, минимальное выражение логической функции, схему в базисе И-НЕ.

Таблица 7.3 - Логическая функция трех переменных $f(x, y, z)$

Номер варианта																							
1				2				3				4				5				6			
x	***y***	***z***	***f***	***x***	***y***	***z***	***f***	***x***	***y***	***z***	***f***	***x***	***y***	***z***	***f***	***x***	***y***	***z***	***f***	***x***	***y***	***z***	***f***
0	0	0	***1***	0	0	0	***0***	0	0	0	***1***	0	0	0	***1***	0	0	0	***1***	0	0	0	***1***
0	0	1	***1***	0	0	1	***1***	0	0	1	***1***	0	0	1	***0***	0	0	1	***0***	0	0	1	***1***
0	1	0	***0***	0	1	0	***0***	0	1	0	***0***	0	1	0	***1***	0	1	0	***0***	0	1	0	***0***
0	1	1	***1***	0	1	1	***1***	0	1	1	***1***	0	1	1	***0***	0	1	1	***1***	0	1	1	***0***
1	0	0	***1***	1	0	0	***1***	1	0	0	***1***	1	0	0	***0***	1	0	0	***1***	1	0	0	***0***
1	0	1	***1***	1	0	1	***0***	1	0	1	***0***	1	0	1	***1***	1	0	1	***1***	1	0	1	***1***
1	1	0	***1***	1	1	0	***1***	1	1	0	***1***	1	1	0	***1***	1	1	0	***0***	1	1	0	***1***
1	1	1	***0***	1	1	1	***1***	1	1	1	***0***	1	1	1	***1***	1	1	1	***1***	1	1	1	***1***

c. Логика функционирования технического объекта представлена аналитически с помощью логической функции четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (таблица 7.4).

- Выражение логической функции минимизировать вручную с помощью карт Карно.
- Используя логический преобразователь, задать таблицу истинности.
- Используя логический преобразователь, минимизировать выражение логической функции, построить схему в базисе И-НЕ (*сохранить как файл F3*).
- Сравнить с результатами ручной минимизации.

с.

Таблица 7.4 - Логическая функция четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

№ варианта	*Логическая функция*
1	$f = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 +$ $+ \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4$
2	$f = \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 +$ $+ \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4$
3	$f = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_4 + \overline{x}_1 \cdot \vec{x}_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 +$ $+ \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4$
4	$f = x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_4 + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 +$ $+ \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
5	$f = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 +$ $+ x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4$
6	$f = x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_4 + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 +$ $+ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4$

2. Задача анализа логических схем

Задана логическая схема технического объекта в базисе И-ИЛИ-НЕ (рисунок 7.2)

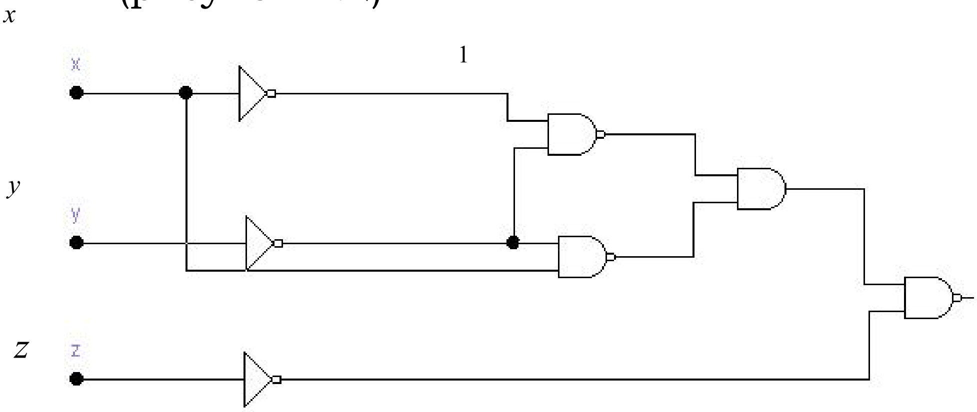


Рис. 7.2

- Составить аналитическое выражение логической функции по заданной схеме.

- Подключить на вход генератор слов, на выход схемы логический пробник и, построив таблицу истинности, доказать справедливость записанного выражения.
- Провести анализ работы схемы при обрыве во входной цепи элемента И в точке 1:
  - если сигнал воспринимается как логическая единица;
  - если сигнал воспринимается как логический нуль.
- Выбрать необходимые инструменты для экспериментальной проверки схемы и определить, как воспринимается сигнал на неподключенном входе при работе базовых элементов.

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Цель работы. Научится моделировать процессы в нелинейных цепях постоянного тока используя пакет MathCAD, получить из созданной модели основные сведения о режимах работы электрической цепи, содержащей нелинейный элемент. На основании полученной модели выяснить влияние параметров цепи не режим ее работы. Сделать выводы о погрешностях моделирования и об адекватности модели.

8.1. Краткие теоретические сведения

Нелинейные элементы широко применяются в электронных устройствах, таких как генераторы высокочастотных колебаний, модуляторы и др. Если вольтамперная характеристика элемента содержит спадающий участок, говорят, что имеет место отрицательное дифференциальное сопротивление, то в цепи, при определенных условиях возникают колебательные процессы [5, 7, 8]. Рассмотрим это на примере.

Пусть дана электрическая цепь, в которой туннельный диод имеющий «N» образную вольтамперную характеристику (т.е. участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением) (рис.8.1)

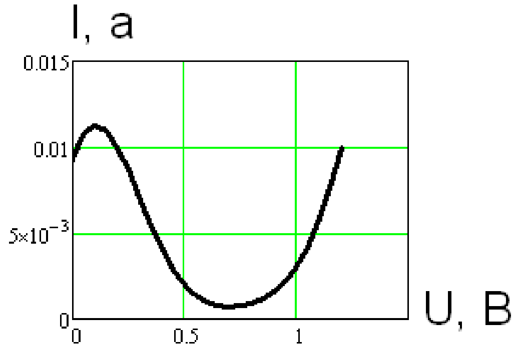


Рис 8.1

подключается последовательно к источнику постоянного напряжения через резистор R и катушку индуктивностью L – рис. 8.2, причем здесь под величиной С подразумевается электрическая емкость всего монтажа и самого туннельного диода.

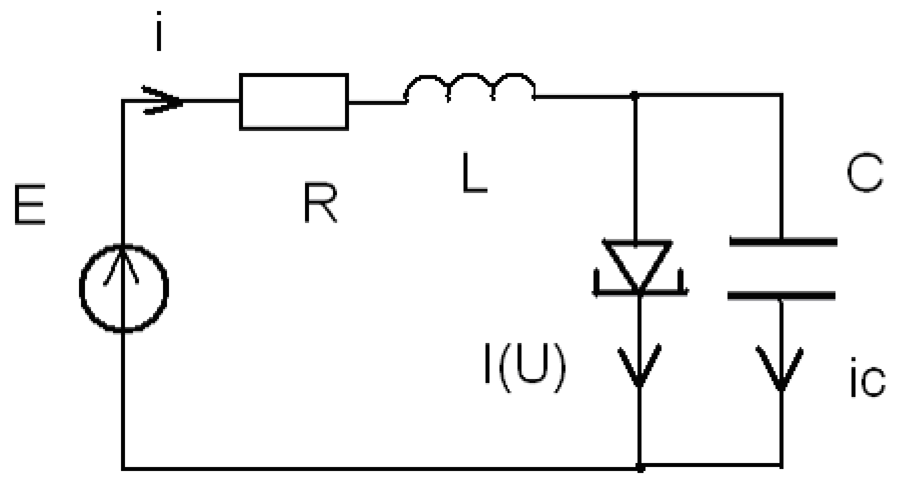


Рисунок 8.2

Составим уравнения электрического состояния цепи:

$$\begin{aligned} &i - I(U) - i_C = 0 \\ &L\frac{di}{dt} + Ri + U = E \end{aligned} \tag{8.1}$$

В первом уравнении ток I является нелинейной функцией напряжения на диоде U – рис.1. Преобразуем эти уравнения к виду:

$$\begin{aligned} &\frac{di}{dt} = \frac{R - iR - U}{L} \\ &\frac{dU}{dt} = \frac{i - I(U)}{C} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Рассматриваемая задача позволяет рассчитать процессы, используя таблично заданную вольтамперную характеристику диода, поэтому вначале составим таблицы значений напряжения на диоде и соответствующие этим значениям токи через диод:

$$U := \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1.0 \\ 1.2 \end{pmatrix} \qquad I := \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.01 \\ 0.004 \\ 0.001 \\ 0.0009 \\ 0.003 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

Далее получим сплайн-интерполяцией с кубической экстраполяцией вольтамперную характеристику туннельного диода в программе:

$$IS := \mathrm{cspline}(U, I)$$

$$V := -0.1, -0.05 .. 1.2 \qquad J(V) := \mathrm{interp}(IS, U, I, V)$$

Далее вводим параметры элементов электрической цепи:

$$E := 0.35 \quad R := 10 \quad C := 50\cdot 10^{-12} \quad L := 20\cdot 10^{-9}$$

Задаем, число точек разбиения и интервал времени:

$$dt := 0.2\cdot 10^{-9} \quad N := 200 \quad k := 0 .. N$$

Уравнения, описывающие энергетическое состояние цепи решим методом Эйлера. Для этого задаем вектор начальных значений переменных – тока и напряжения на диоде.

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ v_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

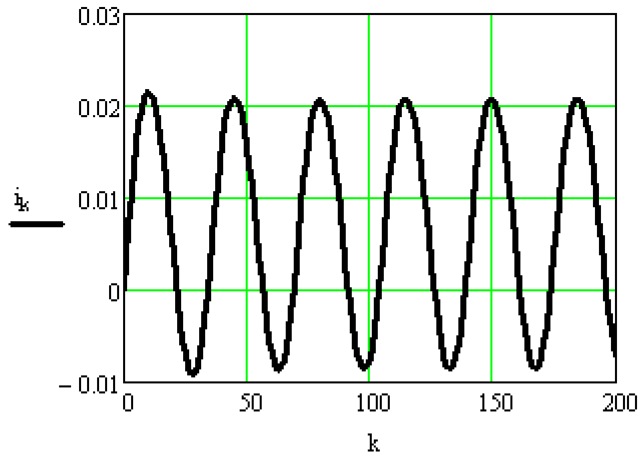
Записываем систему нелинейных дифференциальных уравнений в векторной форме:

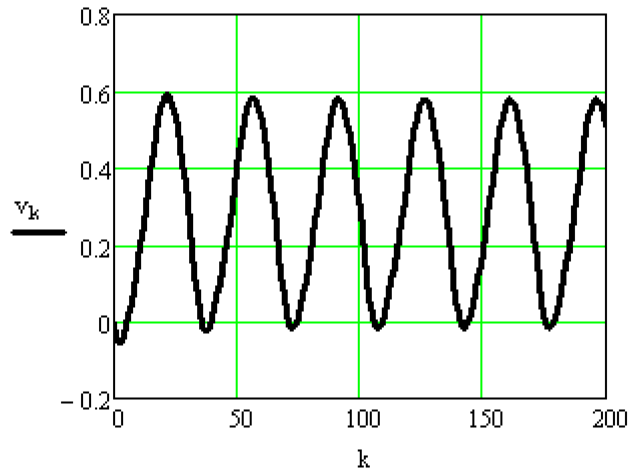
$$\begin{pmatrix} i_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} i_k + \dfrac{\left(E - i_k\cdot R - v_k\right)}{L} dt \\ v_k + \dfrac{\left(i_k - \mathrm{interp}\left(IS, U, I, v_k\right)\right)}{C} dt \end{bmatrix}$$

Далее представляем результаты моделирования.

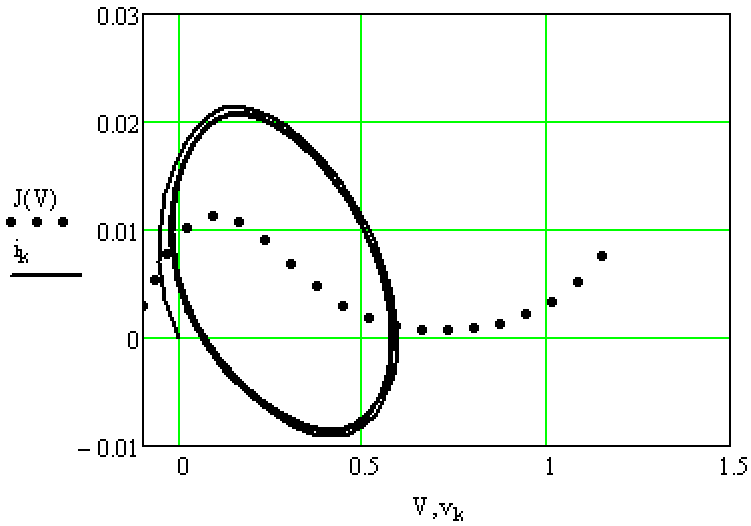
1 способ графическое представление – временная зависимость напряжения на диоде и тока в цепи с резистором. Как видно, эти зависимости при выбранных параметрах, близки к синусоидальным – в цепи возникают незатухающие автоколебания.

$V := -0.1, -0.05 .. 1.2$





2 способ представления – фазовый портрет колебания, зависимость тока через диод от напряжения на самом диоде. Полученный на графике эллипс также показывает наличие колебаний в цепи, на этом же графике показана точками вольтамперная характеристика туннельного диода.



8.2 Задание на выполнение лабораторной работы

1. Смоделировать процессы в нелинейной цепи с параметрами элементов как в рассмотренном выше примере.

2. Дана электрическая цепь, в которой туннельный диод, имеющий вольтамперную характеристику, показанную на рисунке, подключается последовательно к источнику постоянного напряжения через резистор R и катушку индуктивностью L – рис.8.2. Величина C характеризует электрическую емкость всего монтажа и самого туннельного диода.

Требуется получить зависимость токи и напряжения на диоде в функции времени. В отсутствии колебаний подобрать параметры элементов так, чтобы возникли незатухающие колебания. Построить фазовый портрет процесса.

3. Получить сведения о влиянии величин ЭДС, сопротивления и емкости на процессы, наблюдаемые в цепи.

4. Уяснить смысл операторов, входящих в представленную программу.

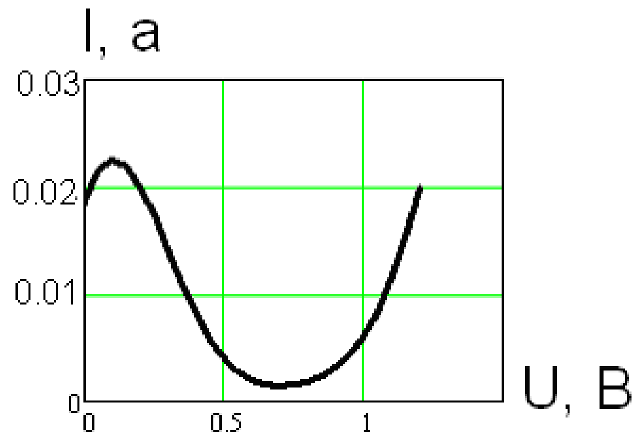
5. Определить интервалы изменения емкости и сопротивления, при которых возникают колебания.

6. Оформить отчет. Подготовиться к сдаче работы.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

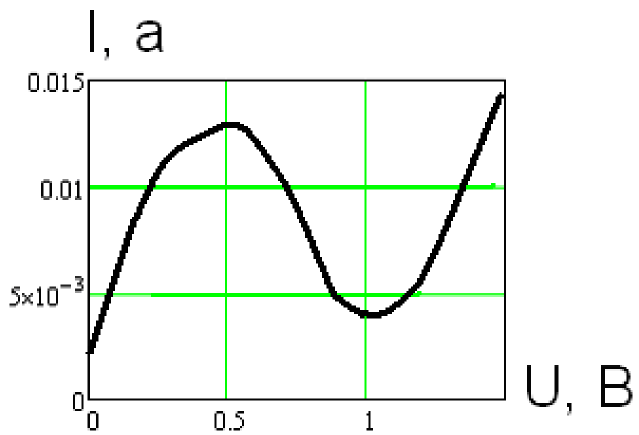
Вариант 1

E= 0.4 В,
R=12 Ом,
C=$50\cdot10^{-12}$ Ф,
L= $2\cdot10^{-8}$ Гн.



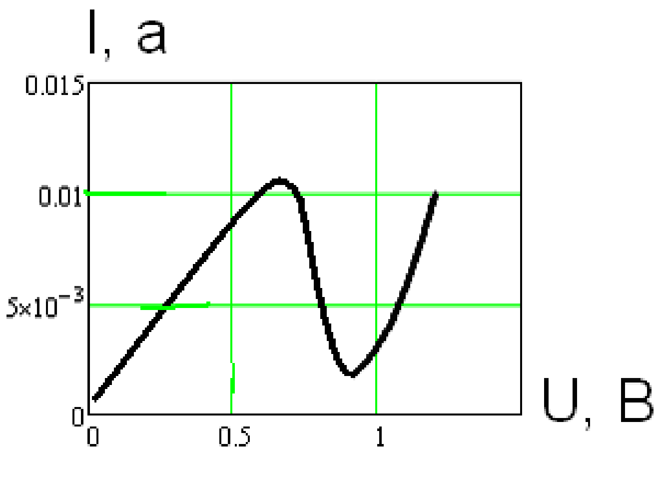
Вариант 2

E=0.25 В,
R=8 Ом,
C=$50\cdot10^{-12}$ Ф,
L= $2\cdot10^{-8}$ Гн.



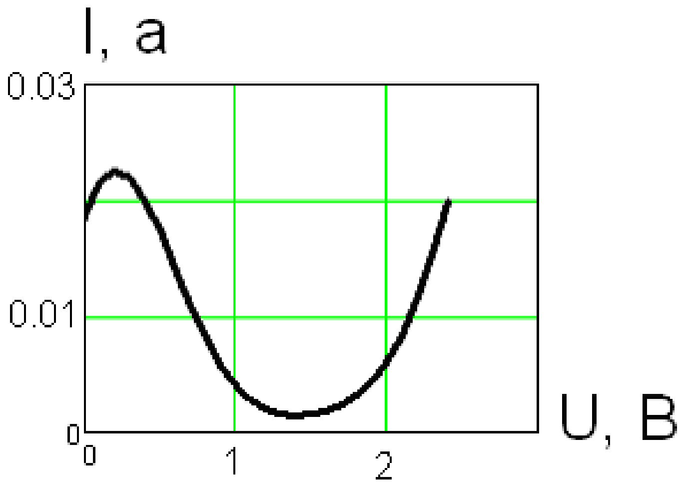
Вариант 3

E=0.5В,
R=8 Ом,
C=$50\cdot10^{-12}$ Ф,
L= $2\cdot10^{-8}$ Гн.



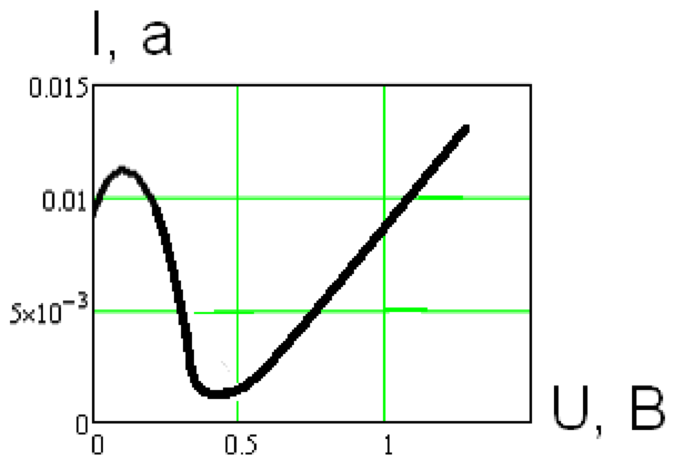
E=1 В,
R= 5 Ом,
C=$50\cdot10^{-12}$ Ф,
L= $2\cdot10^{-8}$ Гн.

Вариант 4



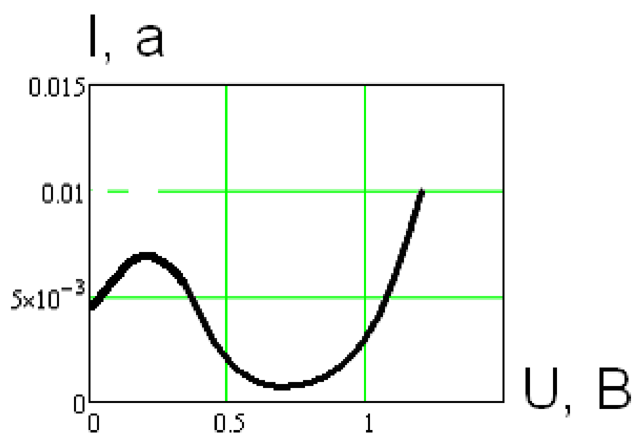
E=0.7 В,
R=12 Ом,
C=$50\cdot10^{-12}$Ф,
L=$2\cdot10^{-8}$ Гн.

Вариант 5



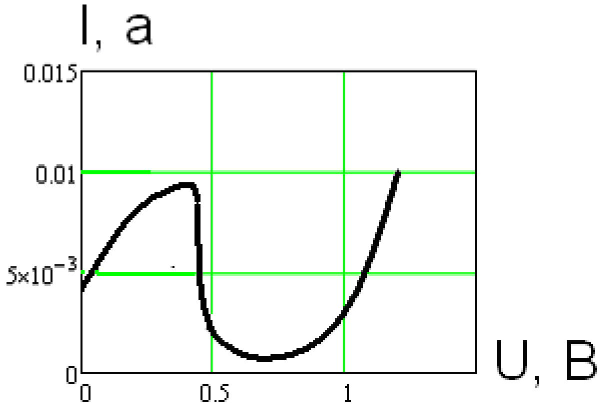
E=0.5 В,
R=9 Ом,
C=$50\cdot10^{-12}$Ф,
L=$2\cdot10^{-8}$ Гн.

Вариант 6



Вариант 7

E=0.45 В,
R= 10 Ом,
C= $50 \cdot 10^{-12}$ Ф,
L= $2 \cdot 10^{-8}$ Гн.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для вузов / Под ред. В.А. Веникова. – М.: Высш. шк., 1981. – 288 с.

2. Математическое моделирование электроэнергетических систем: Учебное пособие / А.В. Лыкин, Н.О. Русина, Т.А. Филиппова, В.И. Зотов. – М.: Изд-во МГОУ, 1993. –198 с.

3. Лыкин, А.В., Русина Н.О. Математическое моделирование электрических систем и их элементов: Учеб. пособие / Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 93 с.

4. Шаталов, А.Ф Электромагнитная совместимость в электроэнергетике: учебное пособие / А.Ф. Шаталов, И.Н. Воротников, И.И. Боровлев; Ставропольский государственный аграрный университет. – Ставрополь: АГРУС, 2012. – 200 с.

5. Воротников, И. Н. Исследование методов измерения электрической емкости на постоянном токе / И. Н. Воротников, М. А. Мастепаненко // Методы и средства повышения эффективности технологических процессов АПК: сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции. – г. Ставрополь: АГРУС Ставропольского гос. Аграрного ун-та. – 2013. – С. 66 – 68.

6. Любченко, В. Я. Физико-математические основы электроэнергетики: Учеб. пособие. В 2 ч.; часть 1 / Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1994. – 58 с.

7. Воротников, И. Н. Способы измерения электрической емкости по параметрам переходного процесса / И. Н. Воротников, М. А. Мастепаненко // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2013. - № 10. – С. 60 – 65.

8. Мастепаненко, М. А. Численный метод экстраполяции контролируемой переменной к установившемуся значению / М. А. Мастепаненко // Методы и технические средства повышения эффективности использования электрооборудования в промышленности и сельском хозяйстве: сборник на-

учных трудов / СтГАУ. - Ставрополь: АГРУС. - 2014. - С. 33 - 37.

9. Мастепаненко, М. А. Математическая модель системы измерения уровня топлива в баках летательных аппаратов / М. А. Мастепаненко // Методы и технические средства повышения эффективности использования электрооборудования в промышленности и сельском хозяйстве: сборник научных трудов / СтГАУ. - Ставрополь: АГРУС. - 2014. - С. 45 - 51.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

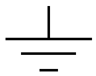
Система схемотехнического моделирования *Electronics Workbench* предназначена для моделирования и анализа электрических и электронных схем.

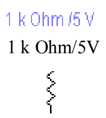
Electronics Workbench представляет собой электронную лабораторию, которая позволяет сделать экспериментальное изучение схем более доступным. Кроме того, удается избежать возможных последствий от ошибок исследователя при работе в реальной лаборатории.

Программа *Electronics Workbench* использует стандартный интерфейс *Windows*, что значительно облегчает ее использование.

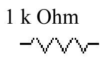
Приступая к выполнению данной лабораторной работы, необходимо запустить программу *Electronics Workbench.*

На рис. 1 представлены основные элементы, используемые при моделировании и анализе электронных схем:

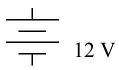
 – заземление, моделирующее уровень логического нуля;



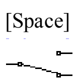
– источник, моделирующий уровень логической единицы;



– резистор (сопротивление);

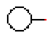


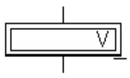
– источник постоянного напряжения (источник ЭДС);



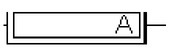
– двухпозиционный выключатель;

 – соединительный узел;

 – пробник логического уровня;



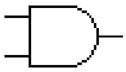
– вольтметр;



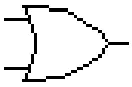
– амперметр.

Рисунок 1 - Основные элементы, используемые при моделировании и анализе электронных схем

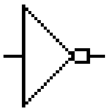
Логические элементы:



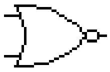
Базис **И**



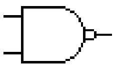
- ИЛИ



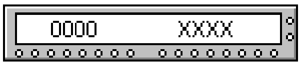
- НЕ



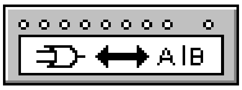
Базис **ИЛИ-НЕ**



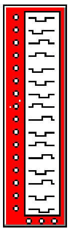
Базис **И-НЕ**



– генератор слов;



– логический преобразователь;



– логический анализатор.

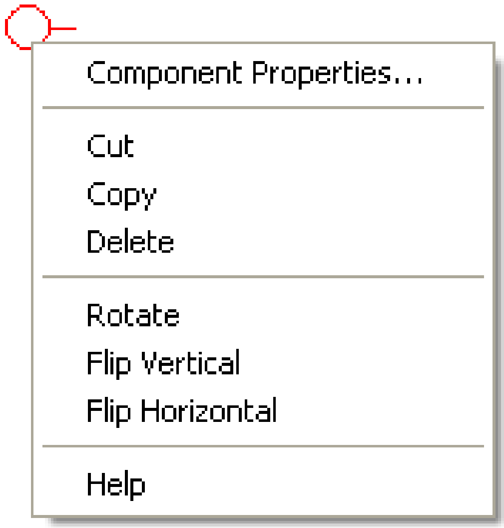
Основные приемы работы с программой Electronics Workbench

○ Выбор элемента схемы: на примере источника ЭДС.

Выбрать на панели приборов значок , а затем навести мышку на значок  и, щелкнув мышью, не отпуская кнопки, установить выбранный элемент на нужное место. Аналогично выполняется и для всех остальных приборов и элементов цепей.

Выбор свойств элемента.

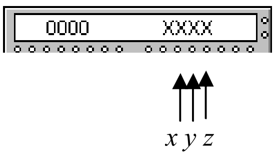
- Выбор свойств осуществляется с помощью контекстного меню. Элемент выделяется одинарным нажатием левой кнопки мыши, после чего изображение элемента «краснеет». При щелчке правой кнопкой мыши осуществляется переход в контекстное меню, где можно указать требуемые параметры элемента с помощью команды *Component properties.*



- Кроме того, можно «вращать» элементы с помощью команды *Rotate.*
-

Работа с генератором слов.

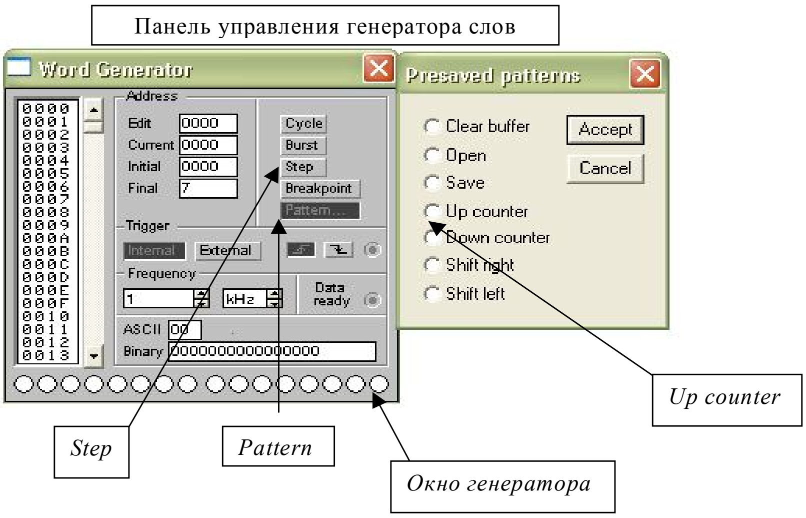
- Подать на генератор слов входные сигналы



- Произвести двойной щелчок мышью; откроется панель управления генератора слов.

Нажать на кнопку *Pattern* (Свойства) и установить счетчик *Up counter*.

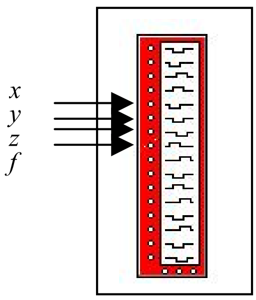
- В окне *Final* ввести номер последней комбинации, например для функции трех переменных – 7.



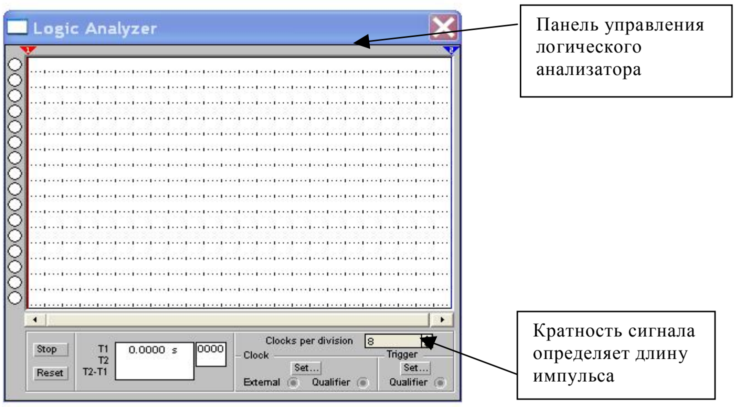
- Последовательным нажатием кнопки *Step* получить все комбинации входных сигналов, которые отражаются в виде двоичного кода в окне генератора слов.

Работа с логическим анализатором.

- Подать на логический анализатор входные и выходные сигналы



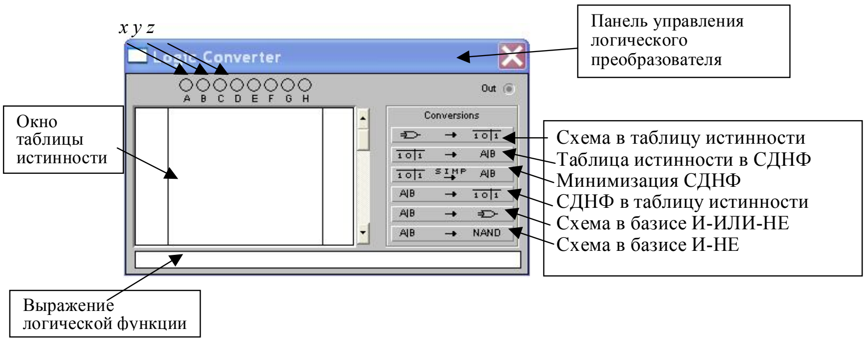
- Произвести двойной щелчок мышью; откроется окно:



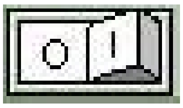
• Последовательным нажатием кнопки *Step* генератора слов формируется временная диаграмма в окне логического анализатора.

Работа с логическим преобразователем.

• Произвести двойной щелчок мышью; откроется окно:



– Чтобы схема начала функционировать, необходимо нажать кнопку в верхнем правом углу.



Приложение 2
Пример классического метода расчета переходных процессов

Исследуем электромагнитные процессы в цепи, изображенной на рис. 2.1, происходящие после замыкания ключа.

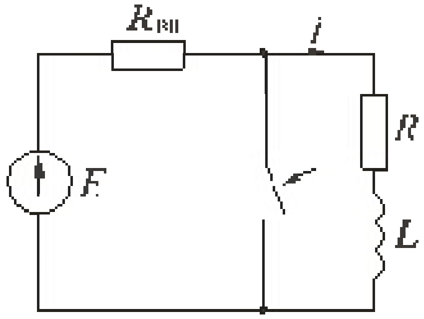


Рис. 2.1

Рассчитаем установившийся режим в цепи до коммутации (до замыкания ключа) и определим из него независимое начальное условие — ток в катушке в момент $t = 0_-$, непосредственно предшествующий коммутации:

$$i(0_-) = i(0_+) = E \;/\; (R_{вн} + R). \tag{2.1}$$

Найдем установившийся ток i после коммутации. Так как во вновь образованном контуре из катушки L и резистора R нет источника, то $i_у = 0$.

Для определения свободной составляющей тока запишем по второму закону Кирхгофа уравнение электрического состояния цепи после коммутации:

$$L\frac{di_{св}}{dt} + Ri_{св} = 0\,. \tag{2.2}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$pL + R = 0. \tag{2.3}$$

Общее решение уравнения для свободной составляющей:

$$i_{св} = A\, e^{pt}, \tag{2.4}$$

где: A – постоянная интегрирования;
$p = -R/L$, c^{-1} – корень характеристического уравнения.

Записав общий вид переходного тока катушки:

$$i = i_у + i_{св} = A\, e^{pt}, \tag{2.5}$$

приравниваем его значение $i(0_+) = A$ в точке $t = 0_+$ к значению $i(0_-)$. Получаем искомую константу:

$$A = E\,/\,(R_{вн} + R) = I_0. \tag{2.6}$$

Переходный ток $i = i_у + i_{св}$ при этом равен:

$$\mathbf{i} = \mathbf{I}_0 \mathbf{e}^{-\frac{R}{L}t} = \mathbf{I}_0 \mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{2.7}$$

где $\tau = L\,/\,R$ – постоянная времени цепи.

Постоянная времени – это время, в течение которого свободная составляющая процесса уменьшается в е = 2,72 раза по сравнению с начальным значением.

График изменения переходного тока показан на рис. 2.2.

Определим э.д.с. самоиндукции катушки:

$$\mathbf{e}_L = -\mathbf{L}\frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_{\mathbf{BH}} + \mathbf{R}}\mathbf{E}\mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \mathbf{I}_0 \mathbf{R} \mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{2.8}$$

при $t \geq 0$.

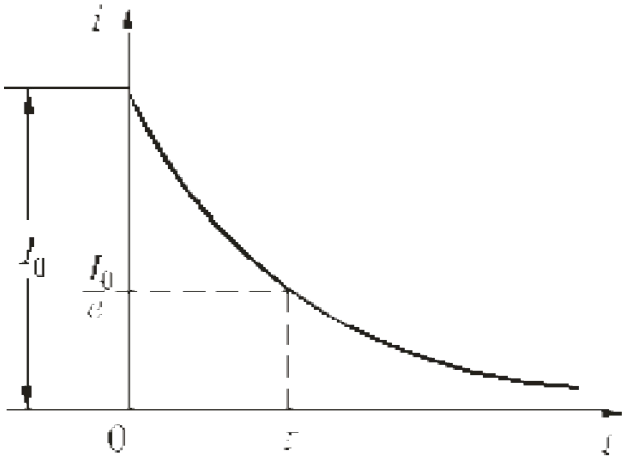


Рис. 2.2

В момент коммутации э.д.с. равна напряжению на сопротивлении *R*, а в дальнейшем уменьшается по экспоненциальному закону. На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1. При коротком замыкании в рассматриваемой цепи ток в ней изменяется по экспоненциальному закону, уменьшаясь от начального значения до нуля.

2. Скорость изменения тока определяется постоянной времени цепи, которая равна индуктивности катушки, деленной на активное сопротивление цепи.

3. Практически можно считать, что переходный процесс заканчивается при $t \approx (3...5)\tau$, когда первоначальное значение тока уменьшается по модулю на порядок.

4. Напряжение на катушке в начальный момент времени равно напряжению на активном сопротивлении:

$u_L(0_+) = I_0 R$.

5. С энергетической точки зрения рассматриваемый переходный процесс характеризуется расходом энергии магнитного поля катушки на тепловые потери в резисторе. Следует отметить, что сопротивление резистора влияет не на количество выделенной теплоты *W*, а на начальное значение напряжения катушки и длительность процесса. В самом деле:

$$W = \int_0^\infty i^2 R dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{L I_0^2}{2}. \qquad (2.9)$$

Приложение 3
Включение цепи с резистором и катушкой на синусоидальное напряжение

Если напряжение источника цепи (рис. 3.1):

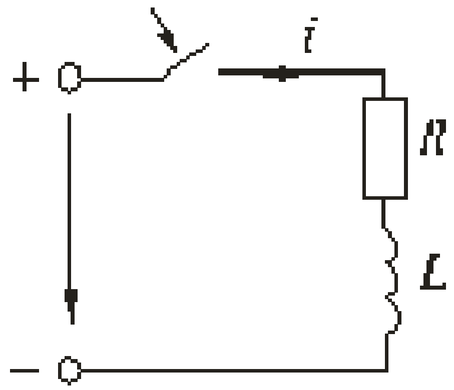


Рис. 3.1

$u = U_m sin(\omega t + \psi),$ (3.1)

то установившийся ток:

$i_y = U_m / Z\ sin(\omega t + \psi - \varphi),$ (3.2)

где: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ – полное сопротивление цепи; $\varphi = arctg(\omega\ L/R)$ - угол сдвига фаз между напряжением и током.

Свободный ток определяется:

$i_{св} = A\ e^{-t/\tau}.$ (3.3)

Суммируя установившуюся и свободную составляющие, получим выражение для переходного тока:

$i = i_y + i_{св} = U_m / Z\ sin(\omega t + \psi - \varphi) + A\ e^{-t/\tau}.$ (3.4)

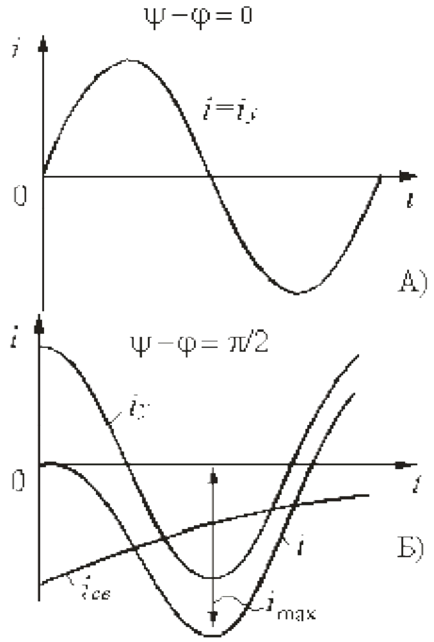


Рис. 3.2

используя независимые начальные условия при $t = 0$:

$$i(0_-) = i(0_+) = 0,$$

находим постоянную интегрирования:

$$A = -U_m / Z \sin(\psi - \varphi). \tag{3.5}$$

Тогда переходный ток:

$$i = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{Z}\sin(\psi - \varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{3.6}$$

Зависимости переходного тока от времени при различных значениях разностей $\psi - \varphi$ показаны на рис. 3.2. Их анализ позволяет сделать следующие выводы.

1. Если в момент включения установившийся ток равен нулю *($\psi - \varphi = 0$ или $\psi - \varphi = \pi$)*, то свободной составляющей тока не возникает и в цепи сразу возникает установившийся режим:

$$i = i_y = I_m \sin(\omega t) = U_m / Z \sin(\omega t).$$

3.1 Включение цепи с резистором и конденсатором на синусоидальное напряжение

Пусть напряжение источника изменяется по закону:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi). \quad (3.7)$$

Установившаяся составляющая напряжения на конденсаторе (рис. 3.3) равна:

$$u_{Cy} = -U_m X_C / Z \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi / 2). \quad (3.8)$$

где: $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ - полное сопротивление цепи;
$X_C = 1 / (\omega C)$ – емкостное сопротивление;
$\varphi = -arctg(X_C / R)$ – угол сдвига фаз между установившимся током в цепи и приложенным синусоидальным напряжением.

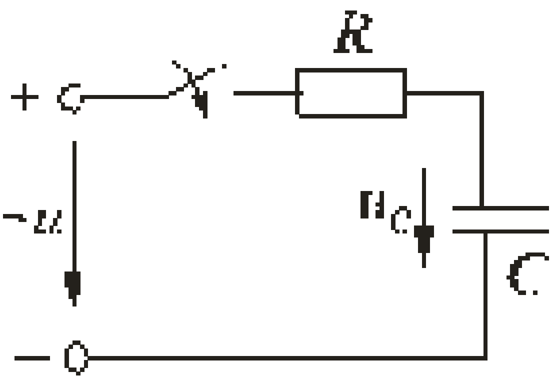


Рис. 3.3

Свободная составляющая напряжения на конденсаторе определяется по выражению:

$$u_{Cсв} = A\, e^{-t/\tau}, \ \tau = RC. \quad (3.9)$$

Переходное напряжение на конденсаторе:

$$u_C = u_{C_у} + u_{C_{св}} = -\frac{U_m}{Z\omega C}\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.10)$$

Полагая, что $u_C(0_-) = 0$, для постоянной интегрирования получим:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{U_m}}{\mathbf{Z\omega C}}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3.11)$$

Окончательно напряжение на конденсаторе можно записать в виде:

$$u_C = \frac{U_m}{Z\omega C}\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{U_m}{Z\omega C}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (3.12)$$

Ток в цепи:

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_m}{R}\left[\cos\varphi\sin(\omega t + \psi - \varphi) + \sin\varphi\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (3.13)$$

Зависимости переходного напряжения на конденсаторе от времени при различных значениях разностей ψ - φ показаны на рис. 3.4. Их анализ позволяет сделать следующие выводы:

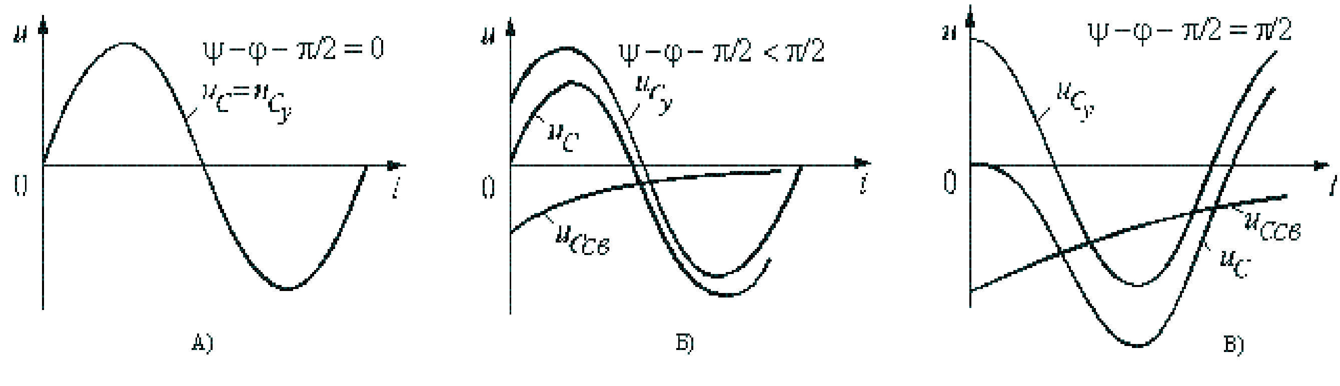


Рис. 3.4

1. Если в момент включения мгновенное значение установившегося напряжение на конденсаторе равно нулю $(\psi -$

$\varphi - \pi / 2 = 0$), то и свободная составляющая напряжения равна нулю. В цепи сразу устанавливается режим (рис. 3.4аа).

2. Если в момент включения мгновенное значение установившегося напряжение на конденсаторе имеет наибольшее значение $(\psi - \varphi - \pi / 2 = \pi / 2)$, то переходное напряжение достигает максимального значения приблизительно через половину периода и может приблизиться к удвоенной амплитуде установившегося напряжения, но не превысит его (рис. 3.4 в).

Приложение 4

Система Mathcad
Назначение и состав системы. Входной язык и язык реализации системы. Основные объекты входного языка системы Mathcad

Назначение системы: MathCAD - это интегрированная система программирования, ориентированная на проведение математических и инженерно-технических расчетов. MathCAD содержит текстовый редактор, вычислитель, символьный процессор и графический процессор.

Вид окна системы MathCAD аналогичен окнам приложений ОС семейства Windows (Word, Exel и др.).

1. Интерфейс пользователя в системе MathCAD.

Интерфейс пользователя состоит из:

1. строки заголовка;
2. строки главного меню;
3. из строки состояния,

которая включается командой *View/Status Bar*, и на которой отображается следующая информация (слева направо):
- контекстно-зависимая подсказка о готовящемся действии,
- режим вычислений (AUTO (автоматический) или Calc 9 (ручной)),
- режим Gaps Lock (CAP),
- режим Num Lock (NUM,), номер страницы, на которой находится курсор (Page 1);

4. из панелей Standard, Formatting, Math, Controls, Recources:

На каждой из панелей имеется характерная вешка перемещения в виде выпуклой вертикальной черты в начале каждой панели. С помощью нее можно переносить панели в любое место окна редактирования или "прилепить" ее к любой стороне окна.

Настройка состава панелей инструментов. Установить курсор над нужной панелью и правой кнопкой вызвать контекстное меню, из которого выбрать пункт Customize (Настроить), появится диалоговое окно. В левой панели этого окна расположены еще не добавленные пиктограммы, в правой – добавленные. По команде Add пиктограмма переходит в правое окно, а по команде Remove пиктограмма возвращается в левую панель.

Пиктограммы панели дублируют основные команды главного меню

На панели собраны команды, предназначенные для форматирования текста, такие как изменение стиля и шрифта текста, выравнивание, создание списков.

Панель служит для вставки в документ стандартных элементов управления интерфейса пользователя (флажков, переключателей, полей ввода и т.п.).

Панель служит для вызова ресурсов MathCAD (примеров, учебников, но только на английском языке).

Наибольший интерес для нас в системе MathCAD представляет математическая панель 

. Она содержит перемещаемые палитры математических знаков, которые служат для ввода практически всех известных математических символов и шаблонов операторов и функций.

1. Calculator – служит для ввода арифметических операций и часто используемых простых функций. Эта палитра фактически дублирует обычный калькулятор.

2 Graph – содержит команды для построения семи типов графиков.

3. Matrix - для создания векторов и матриц и некоторые операции для работы с ними.

4. $x=$ Evaluat... - для вставки операторов управления вычислениями и для ыставки пользовательских операторов.

5. Calculus - эта палитра содержит операции высшей математики (производные, интегралы, пределы и др.),а также знак бесконечности ∞.

6. Boolean - для вставки операций сравнения и логических операций Not $\neg$, And $\wedge$, Or $\vee$

7. Programming - инструменты программирования системы MathCAD.

8. $\alpha\beta$ Greek - палитра для набора греческих символов.

9. Symbolic - содержит ключевые слова, управляющие символьными вычислениями.

10 

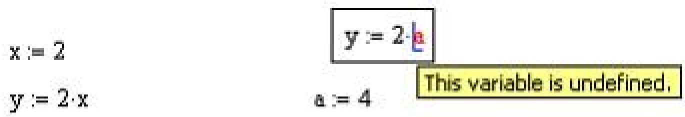
эта панель вместе с панелью Symbolic содержит ключевые слова, используемые при символьных вычислениях. Здесь расположены команды, задающие тип символьной переменной.

2. Документ в системе MathCAD

Состоит из *блоков*, т.е. отдельных частей. В документе блоки имеют *точку привязки*, расположенную слева $.x := 10$.

Блоки м.б. трех типов - текстовые, вычислительные, графические. *Текстовые* блоки играют роль неисполняемых комментариев. Они служат лишь для повышения наглядности документа. *Вычислительные* блоки состоят из исполняемых математических выражений, например, формул, уравнений, равенств неравенств и т.д. *Графические* блоки также являются исполняемыми.

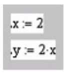
Блоки можно *перемещать по документу* и располагать в удобной для пользователя форме, но для правильного функционирования системы имеет большое значение *правильный порядок расположения блоков*. Например, если в некотором блоке содержатся операции, требующие данных из другого блока, то этот другой блок обязательно должен выполняться первым и располагаться перед использующим его блоком. Иная ситуация приведет к появлению ошибки. Сигнал ошибки имеет вид надписи, от которой отходит черта, указывающая место ошибки:

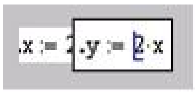


.

При манипуляциях с блоками на экране могут оставаться нежелательные искажения. Для их устранения следует использовать команду *Refresch* (обновить) меню *View*.

В документе MathCad эффективно решена проблема *сквозной передачи данных* от одного блока к другому, например, от одного математического выражения к другому, от него к таблицам, от таблиц к графикам и т.д. Поэтому изменение в любой формуле или в задании входных данных тут же ведет к пересчету задачи по всей цепи взаимодействия блоков (это не относится, однако к символьным операциям, реализуемым с помощью команд меню).

Размеры блоков устанавливаются автоматически в зависимости от числа входящих в них знаков, либо от *заданных размеров графиков*. Обычно границы блоков не видны, но можно установить *подсвеченный режим показа блоков* (команда <u>*View Regions*</u>) 

Блоки не должны налагаться друг на друга . Если такое произошло, то надо воспользоваться командой разделения перекрывающихся областей в документе (*Formatt/Separate Regions*), предварительно выделив эти перекрывающиеся области.

Сразу после запуска система готова к созданию документа с необходимыми пользователю вычислениями. Соответствующее новому документу окно редактирования получает название Untitled: N , где N – порядковый номер документа. 

При сохранении на диск документ системы MathCad записывается в файл с расширением .mcd.

Окно редактирования содержит (даже когда очищено) два важных объекта – ***курсор ввода в виде красного крестика*** и вертикальную линию, отделяющую текущую страницу от соседней (справа) . Если документ большой, то в некотором месте будет наблюдаться и прерывистая горизонтальная линия раздела страниц . Эти линии раздела показывают, каким образом будет осуществляться разбиение на страницы при распечатке документа на принтере. Изменить параметры страницы можно с помощью команды *File/Page Setup*. В окне редактирования документа можно *включить линейку* с помощью команды *View/Ruler* . *Масштаб документа* можно изменить по команде *View/Zoom*.

3. *Основные объекты входного языка системы MathCAD*

Фактически документы MathCad *представляют собой программу*, написанную на *визуально-ориентированном языке программирования*. Визуально- ориентированные языки программирования задают программу не в виде малопонятных кодов, а в виде *визуально понятных объектов*. Язык программирования MathCad ориентирован на математические вычисления и потому практически не отличается от обычного языка математических статей, отчетов и книг.

Входной язык MathCad относится к интерпретируемому типу. Это значит, что, когда система опознает какой-либо объект, она немедленно исполняет указанные в блоке операции.

Визуально-ориентированный язык общения системы MathCad надо отличать от *языка реализации системы*, т.е. обычного языка программирования высокого уровня, на котором написана система. Языком реализации системы MathCad является один из самых мощных языков высокого уровня – C++.

По существу входной язык системы – промежуточное звено между скрытым от пользователя языком документа и языком реализации системы. По мере того как пользователь создает (средствами текстового, формульного, символьного и графического редакторов) в окне редактирования объекты (тексты, формулы, таблицы и графики), система сама составляет программу на некотором промежуточном языке связи. Эта программа хранится в оперативной памяти до тех пор, пока не будет записана на диск в виде файла с расширением .mcd. Однако от пользователя не требуется знание языков программирования (реализации и связи), достаточно освоить приближенный к естественному математическому языку входной язык системы.

К *основным объектам входного языка* системы MathCAD можно отнести: **алфавит, константы, переменные, операторы, функции**.

Алфавит – строчные и прописные латинские буквы, цифры от 0 до 9, греческие буквы. Следует отметить, что MathCAD различает строчные и прописные буквы (X и x – разные переменные) и различает шрифт (X и *X* – тоже разные переменные). Также в алфавит входят символ бесконечности ∞, штрих ′(набирается с помощью клавиш ctrl/F7), символ подчеркивания _, символ процента, нижний индекс (набирается с помощью клавиши «.», индекс в определении имени переменных и функций, например K_2 , не надо путать с числовым индексом векторной переменной). Имя переменной или функции в системе MathCAD может быть *любой длины*, но:

- имена не должны начинаться с цифры, символа подчеркивания, штриха или процента;
- символ бесконечности может быть только первым в имени;
- все буквы в имени должны иметь один стиль и шрифт;
- имена не могут совпадать с именами встроенных функций, констант и размерностей, например, sin или TOL. Тем не менее, допускается их переопределение, но тогда одноименная встроенная функция не будет использоваться по первоначальному назначению;
- MathCAD не различает имен переменных и функций: если сначала определить функцию f(x), а потом переменную f, то в оставшейся части документа будет утерян доступ к функции f(x);
- в некоторых случаях желательно использовать имена переменных и функций, содержащие символы операторов MathCAD или другие символы, которые нельзя вставлять в имена непосредственно, для этого надо набрать комбинацию клавиш Ctrl/Shift/J, которая позволит вставить пару квад-

ратных скобок с местозаполнителем внутри $[\blacksquare]$. Имя, составленное из любых символов и заключенное в эти квадратные скобки, MathCAD будет воспринимать корректно $[a + b] := 45$.

Константы – это числа и предварительно определенные системные константы:

$\pi = 3.142$ $e = 2.718$ $\% = 0.01$ $TOL = 1 \times 10^{-3}$ $ORIGIN = 0$ $\infty = 1 \times 10^{307}$ $CTOL = 1 \times 10^{-3}$
$PRNCOLWIDTH = 8$ $PRNPRECISION = 4$.

Эти значения системных констант устанавливаются после загрузки системы.

$CTOL = 1 \times 10^{-3}$ - погрешность для условий ограничения при решении оптимизационных задач с применением функций *Find, Minerr, Maximize, Minimize*;

$PRNCOLWIDTH = 8$ - ширина столбца, используемая при записи файлов функцией WRITEPRN;

$PRNPRECISION = 4$ - число значащих цифр при записи файлов функцией WRITEPRN.

Формат вывода системных констант $\pi = 3.1415926535897931$ $e = 2.7182818284590451$ можно изменить.

Для этого достаточно дважды щелкнуть по числу в блоке вывода результата, при этом появится диалоговое окно, в котором надо будет установить число знаков после запятой. Таким же образом можно изменить формат вывода любых других результатов вычислений. *По умолчанию* формат вывода имеет *три знака* после запятой.

Значения некоторых системных констант можно изменить с помощью команды Tools / Worksheet Options... в диалоговом окне, либо эти значения можно переопределить через оператор присваивания $ORIGIN := 1$.

Переменные – это объект, числовое значение которого может меняться по ходу выполнения документа. Для *присваивания* переменной числа или результата выражения используется знак *локального* присваивания $:=$, который можно набрать с клавиатуры (клавиша «двоеточие» на латинском шрифте), с палитры Calculator $:=$ и с палитры Evaluat.. $:=$. Знак присваивания $:=$ в системе MathCAD означает, что действие происходит справа налево (а не слева направо). Если при оформлении документа необходимо, чтобы присваивание выглядело на экране как знак равенства без двоеточия, то правой кнопкой надо вызвать контекстное меню и в диалоговом окне вместо пункта “Default” выбрать пункт “Equal”.

Знак *обычного равенства* $=$ (который применяется в системе MathCAD в основном для вывода результата) можно использовать только для *первого присваивания*.

При *локальном присваивании* надо обязательно соблюдать *правильное расположение блоков*. Но иногда в документах возникает необходимость использовать значение некоторой переменной выше на листе, чем расположен оператор присваивания $\begin{matrix} y := 3\cdot c & y = 12 \\ c \equiv 4 & \end{matrix}$. В таких случаях вместо локального присваивания используется *знак глобального присваивания* $\equiv$, который можно набрать либо с клавиатуры (клавиша «волнистая черта»), либо с палитры Evaluat.. $\equiv$. Если в документе используется глобальное присваивание, то MathCAD проводит вычисления в *следующей последовательности*: вычисляются сверху вниз все блоки с оператором глобального присваивания, а затем снова с самого начала документа вычисляются сверху вниз все оставшиеся блоки. Это означает, что в блоках с оператором глобального присваивания *нельзя использовать результат вычислений из обычного блока*.

В отличие от языков программирования система MathCAD не требует точного задания *типов переменных*: целочисленные, вещественные, комплексные, текстовые, логические. Тип переменной автоматически определяется присвоенным ей значением:

$a := 20 \quad b := 0.005 \quad z := 5 + 6i \quad st := "Hello" \quad g1 := a < b \quad g2 := a > b$

$a = 20 \quad b = 5 \times 10^{-3} \quad z = 5 + 6i \quad st = "Hello" \quad g1 = 0 \quad g2 = 1$.

В нижней строке показан результат вывода соответствующей переменной. *Целые* переменные пояснений не требуют.

Вещественная переменная может быть набрана и как десятичное число с любым количеством десятичных цифр после точки $a := 0.456784$, и в экспоненциальной форме, для чего после ввода числа надо напечатать символ умножения и ввести 10 в нужной степени $b := 456784 \cdot 10^{-6}$.

При вводе *комплексных* переменных мнимая единица набирается с палитры Calculator i , либо с клавиатуры как 1i . Если просто набрать как $\cdot i$, то она будет восприниматься как простая переменная. Форму представления мнимой единицы можно изменить $a := 1 + 4 \cdot j$. Для этого дважды щелкнуть в окне вывода с мнимой единицей и в диалоговом окне сделать соответствующий выбор

Текстовая переменная заключается в кавычки. Значением *логической* переменной может быть 0 (что соответствует «лжи») или 1 (что соответствует «истине»).

В MathCAD есть и *специальный тип* переменных, именуемых *ранжированными* или*циклическими* переменным, которые задаются следующим образом:

$x := -1, -0.5 .. 1 \qquad xn := -1 \qquad n := 4 \qquad xk := 1$

$x =$

-1
-0.5
0
0.5
1

$$x := xn, xn + \frac{xk - xn}{n} .. xk$$

$x =$

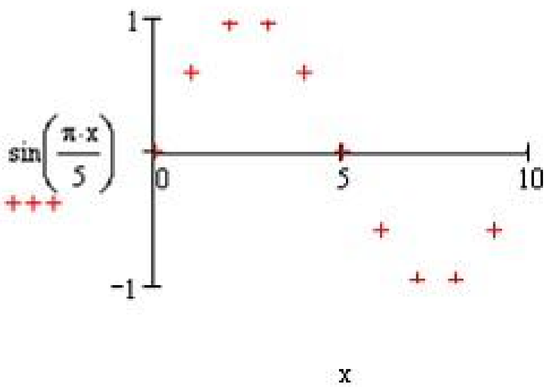
-1
-0.5
0
0.5
1

Ранжированная переменная, так же как и массив, хранит целый набор значений, но, в отличие от массивов, невозможно получить доступ к отдельному элементу этой переменной. С помощью ранжированных переменных можно задать значения всех элементов матрицы или вывести график по точкам.

$i := 0..2 \qquad j := 0..2$

$A_{i,j} := i + j \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$x := 0..10$



Верхняя граница ранжированной переменной необязательно должна быть элементом последовательности, это число просто *ограничивает* последовательность сверху (или снизу для убывающей последовательности).

Массивы.

Большим преимуществом системы MathCAD является возможность оперировать не только *скалярными* величинами, но и с *массивами*. MathCAD поддерживает два вида массивов – *одномерные* (векторы) и *двумерные* (матрицы). Элементы массивов характеризуются *числовыми индексами*, которые вставляется с помощью клавиши “[”, либо командой  с панели . Обычно нумерация идет с нуля. Нумерация задается значением системной переменной ORIGIN, которая по умолчанию равна нулю. V_0- первый элемент вектора, $M_{0,\ 0}$- первый элемент матрицы. Можно обратиться не только к элементу массива, но и к его колонке, например, $M^{<0>}$- первая колонка матрицы. *Элементами* массива могут быть *числа, константы, переменные, математические выражения и даже другие массивы.* Соответственно массивы могут быть *численными и символьными.* Основные операции для работы с векторами и матрицами собраны на панели 

.

Существует *несколько способов создания* массивов. Самый *простой и наглядный* способ создания матрицы с помощью команды <u>*Insert/Matrix*</u> . При вызове этой команды появляется диалоговое окно, в котором надо задать число строк и число колонок матрицы (вектор - это матрица с одной колонкой). Появится шаблон матрицы, в черные квадратики которого надо ввести значения элементов матрицы.

Добавление в уже созданную матрицу строк или столбцов производится точно так же. Для этого надо выделить элемент матрицы, *правее и ниже* которого будет осуществлена вставка столбцов и (или) строк

Для того, чтобы *удалить* строки и столбцы из матрицы, надо установить курсор на элемент матрицы, который находится в *самом левом столбце* из тех, которые нужно удалить и в *самой верхней строке* из тех, которые нужно удалить

Также матрицу можно создать через определение его элементов

$$m_{2,2} := 10 \qquad A_{0,0} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A_{1,0} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A_{0,1} := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad A_{1,1} := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \{2,1\} & \{2,1\} \\ \{2,1\} & \{2,1\} \end{pmatrix} \quad \left(A_{0,0}\right)_0 = 1 \quad \left(A_{1,1}\right)_1 = 8$$

Развернуть вложенные массивы можно, установив, флажок 

(Разворачивать вложенные массивы) в окне

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Есть и другие способы создания матриц – создание матрицы с помощью таблицы ввода, создание матрицы путем импорта данных.

Функции.

В системе MatCAD различают *встроенные* функции (функции, заранее введенные разработчиком системы) и *пользовательские функции* (созданные пользователем).

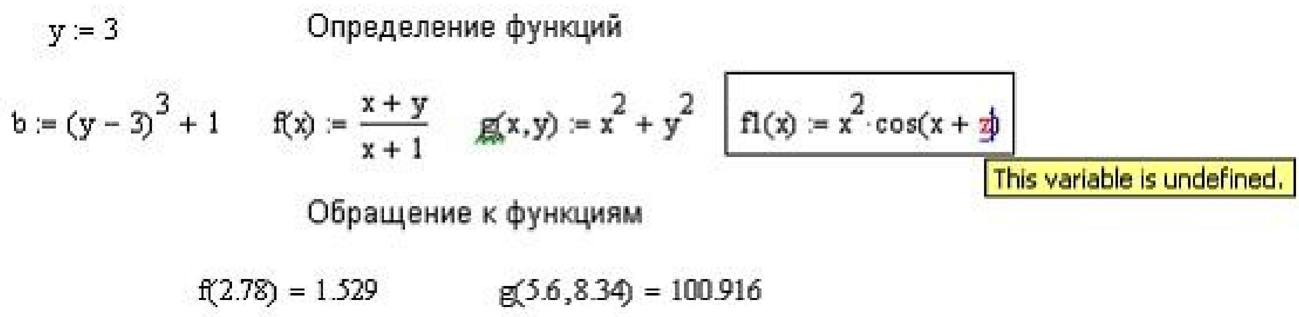
Встроенные функции. Вставляются с помощью команды Insert/Function или набором с

клавиатуры. При этом следует помнить, что имена встроенных функций*чувствительны к регистру*, их следует вводить в точности, как они приведены в системе. Параметры встроенных функций заключаются в скобки. В качестве параметра м.б. константа, переменная или математическое выражение, при этом константа, переменная, выражение должны быть определены ранее:

$$a := 0.5 \qquad x := 2 \qquad y := 9$$

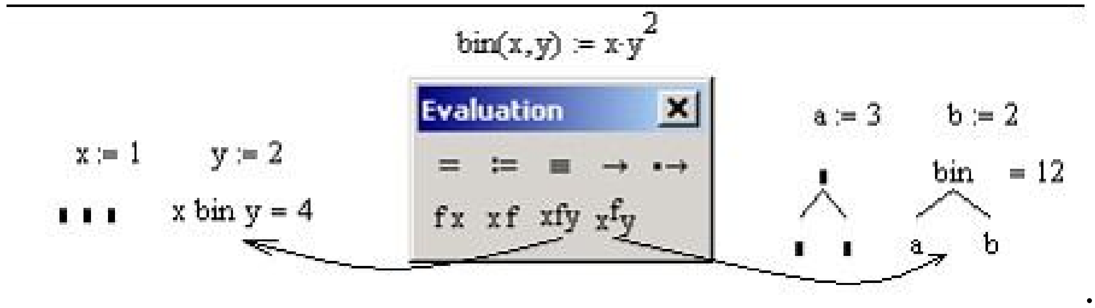
$$\sin(1) = 0.841 \qquad \sin(a) = 0.479 \qquad \sin\left(\sqrt{x}\cdot e^{y}\right) = -0.862$$

Функции пользователя. В MathCAD, как и в языках программирования, есть возможность задания функций пользователя. *Имена функций* пользователя подчиняются тем же правилам, что и имена переменных. *Для задания функции* пользователя нужно *ввести имя*, а затем в круглых скобках *через запятую ввести все аргументы*. Для аргументов можно использовать любые имена, подчиняющиеся тем же правилам, что и имена переменных. Далее, как обычно, надо ввести оператор присваивания и после него – выражение, зависящее от введенных аргументов. Все переменные, присутствующие справа в выражении определения функции, либо должны входить в список аргументов функции, либо должны быть определены ранее. В противном случае будет выведено сообщение об ошибке, причем имя неопределенной переменной будет выделено красным цветом:

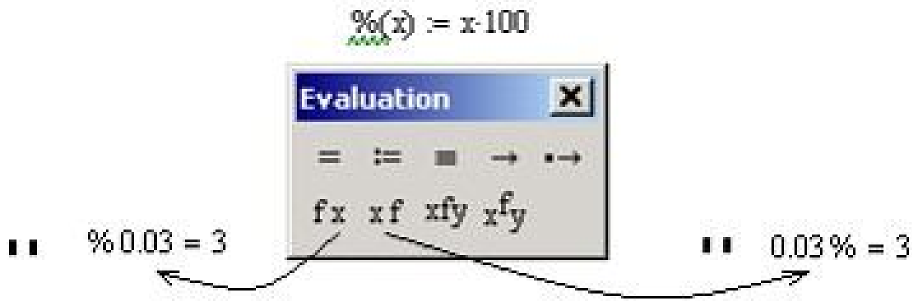


Операторы. Каждый оператор в MathCAD обозначает некоторое математическое действие в виде символа $\blacksquare + \blacksquare$ $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ $\int \blacksquare \, d\blacksquare$ $\blacksquare \le \blacksquare$ $\blacksquare^{(\blacksquare)}$ $\blacksquare \rightarrow$ $\blacksquare := \blacksquare$ $\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare$. Каждый оператор действует на одно или два числа (переменную или функцию), которые называются *операндами*. Если в момент вставки оператора одного или обоих операндов не хватает, то недостающие операнды будут отображены в виде местозаполнителей. Математические палитры *содержат сгруппированные по смыслу* математические операторы:

1. Операторы, обозначающие арифметические действия, называются арифметическими и вводятся с палитры Calculator.
2. Операторы, которые вставляются с палитры Calculus (Вычисления), называются вычислительными операторами (дифференцирование, интегрирование, суммирование, вычисление произведения, пределы).
3. Логические операторы – вводятся с палитры Boolean.
4. Матричные операторы – предназначены для совершения различных действий над векторами и матрицами, вводятся с палитры Matrix.
5. Операторы выражения – сгруппированы на панели Evaluat.. (Evaluation – Выражения) (оператор численного вывода $=$, оператор локального присваивания $:=$, оператор глобального присваивания $\equiv$, оператор символьного вывода).
6. Операторы пользователя. Запросы взыскательного пользователя могут не исчерпываться набором встроенных операторов MathCAD. Для вставки в документы заранее созданных операторов пользователя применяется панель Evaluat.. fx xf xfy $x^f y$. Оператор пользователя может иметь абсолютно любое имя. Присваивать оператору некоторое действие следует точно так же, как функции пользователя. Создание бинарного оператора выглядит след. образом:

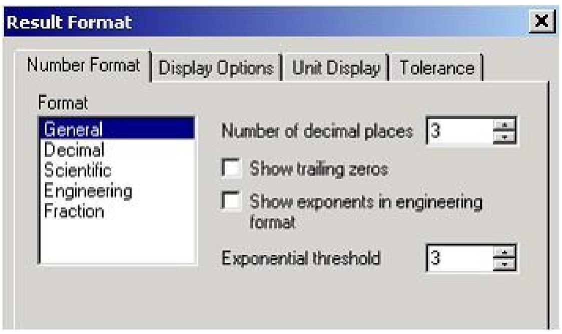


Унарный оператор пользователя создается аналогично



Вывод результатов вычислений и значений переменных осуществляется с помощью

знака обычного равенства = . В различных задачах выводить результаты вычислений требуется в различном виде: как десятичную или простую дробь, десятичную дробь в обычной или экспоненциальной форме. Формат вывода задается командой *Forma/Result*. После вызова этой команды (двойной щелчок на нужном блоке) появляется диалоговое окно*Result Format*:



В списке Format слева можно выбрать один из пяти различных форматов отображения числа, а с помощью полей и флажков справа можно настроить выбранный формат.

General – это используемый по умолчанию формат результатов вычислений. Число представляется в виде десятичной дроби. Количество знаков после запятой задается в поле 

. Если установлен флажок 

, то дробь будет при необходимости дополнена нулями до количества знаков, указанных выше $a = 6.000$. Поле 

задает границу перехода ET (Exponential threshold) к экспоненциальной форме (такую форму числа приобретают, если их значение больше 10^{ET} и меньше 10^{-ET}). При установленном флажке 

в экспоненциальной форме записи используются только порядки, кратные трем $a := 90000$ $a = 90 \times 10^3$. Это является стандартной инженерной формой записи, поскольку для физических величин в системе СИ со степенями, кратными трем, связаны различные стандартные приставки: кило-, мега-, милли- и др.

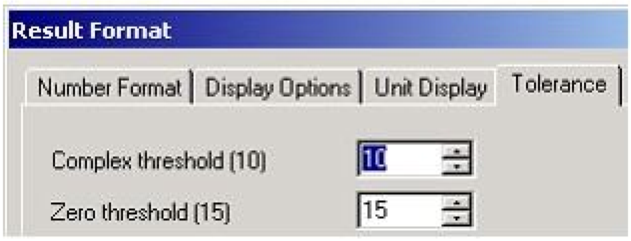
Decimal – формат вывода результата в виде десятичной дроби без экспоненты.

Scientific – в этом формате результат всегда выводится в экспоненциальной форме.

Engineering – также используется только экспоненциальная форма записи дробей, но при этом используются только порядки, кратные трем.

Fraction – в этом формате результат выводится в виде простой дроби.

В диалоговом окне *Result Format* также можно изменять *представление машинного нуля* для *комплексных* чисел CT (Complex threshold) (если Re(Z)/Im(Z) > 10^{CT}, то Z выводится как реальное, если наоборот, то как мнимое) и значение *машинного нуля* ZT (Zero threshold)



Формат вывода может быть *глобальным и локальным.* Чтобы установить локальный формат, можно сделать двойной щелчок по блоку, при этом появится диалоговое окно *Result Format*. Данный блок будет иметь локальный формат, а все остальные - глобальный.

Управление процессом вычислений. После запуска MathCAD находится в режиме*автоматических вычислений.* Это означает, что при внесении каких-либо изменений в документ, все *видимые в данный момент формульные блоки и графики пересчитываются и строятся заново.* В некоторых случаях такой режим работы может быть *нежелательным*, например, если в документе есть сложные вычисления, требуется обработка больших объемов данных или выполняются операции, занимающие много времени. В таких случаях работать с документом оказывается очень неудобно, и возникает необходимость *запретить автоматическое вычисление* либо всего документа, либо для блоков, содержащих наиболее сложные вычисления.

Для того чтобы отключить/включить режим автоматического вычисления для всего документа, надо выбрать команду меню Tools / Calculate / Automatic Calculation. При отключенном режиме автоматического вычисления, для того чтобы пересчитать все блоки в документе можно выбрать команду меню Tools / Calculate / Calculate Worksheet Ctrl+F9. Для того чтобы пересчитать не весь документ, а лишь тот блок, в котором находится курсор, следует выбрать команду меню Tools / Calculate / Calculate Now F9 (если курсор находится в свободном месте рабочей области документа, то пересчитаны будут все блоки, которые в данный момент видны на экране).

Для того чтобы *временно отключить вычисление одного блока*, можно воспользоваться командой *контекстного меню* Disable Evaluation. После выбора этой команды MathCAD при просчете документа вообще не будет «обращать внимания» на данный блок и производить вычисления так, как будто его удалили. Для того чтобы возобновить вычисление «отключенного» блока, нужно выбрать команду *контекстного меню* Enable Evaluation.

Прервать вычисление можно клавишей <Esc>. При этом оставшаяся часть формул будет подсвечена красным цветом.

Единицы измерения физических величин. При проведении физико-технических расчетов почти всегда имеют дело не просто с абстрактными числами, а с некоторыми физическими величинами. Для того чтобы число в выражении рассматривалось как некоторая физическая величина, нужно ввести единицы измерения следующим образом: после введенного числа ввести *знак умножения*, выбрать команду Insert / Unit... Ctrl+U, в диалоговом окне Insert Unit в списках Dimension (All, Acceleration) и Unit (Volts (V)) выбрать нужную единицу измерения $u := 220 \cdot V$. Над размерными переменными можно производить любые *корректные с физической точки* зрения расчеты $I := 10 \cdot A$ $U := 12 \cdot V$ $R := \frac{U}{I}$ $R = 1.2\,\Omega$. Нельзя складывать переменные разной размерности, будет получено сообщение об ошибке $U + I =$ ▪ The units in this expression do not match. (Размерности в этом выражении не совпадают). Но позволяется складывать, например, амперы с кило амперами $I := 10 \cdot A + KA$ $I = 1.01 \times 10^3\,A$.

Для любого *результата вычислений* есть возможность *изменить его единицы измерения*. Если щелкнуть на формульном блоке, содержащем результаты вычислений, то справа от единиц измерения результата появится черный квадратик – поле ввода единиц измерения, к которым необходимо привести результат. Если введенные здесь единицы измерения не будут соответствовать единицам результата, то MathCAD автоматически допишет нужный коэффициент 

. В MathCAD по умолчанию все результаты вычислений представлены в системе СИ. Однако систему измерений можно изменить с помощью команды 

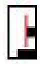
/ 

и диалогового окна 

.

4. Текстовый редактор

Служит для ввода и редактирования текстов. Именно тексты делают документы MathCad документами в общепринятом смысле этого слова.

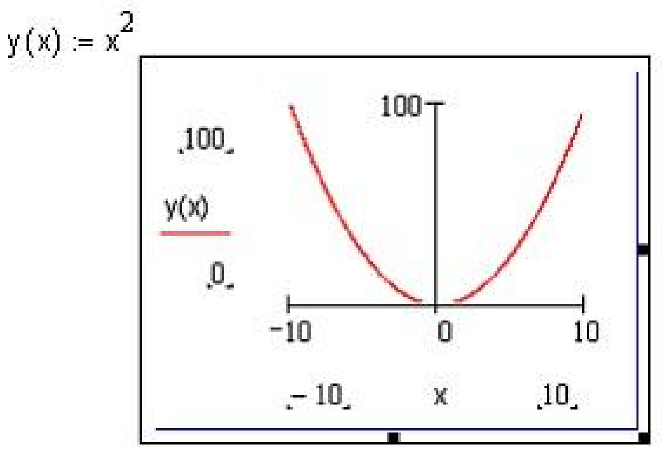
В простейшем случае для ввода текста достаточно ввести символ " на английском регистре. Нередко пользователь начинает набор текстов, забыв установить кавычки. MathCad воспринимает такой набор как ввод математического выражения. Однако, нажав клавишу Пробел, можно тут же превратить набранный фрагмент в текстовый. Признаком текстового блока являются черные квадратики на правой и нижней границах блока, а ***курсор в текстовом блоке приобретает вид красной вертикальной черты*** **.**

Текст может состоять из слов, математических выражений и формул, спец. знаков. Русский текст вводится с помощью любого кириллического шрифта *Courier*, *Times New Roman Cyr*, *Arial Cyr*). Также для работы с текстом предусмотрены команды меню *Format/Text и Format/Paragraph*. Можно создать текстовую область (текст начинается на позиции курсора), создать текстовый параграф (текст начинается первой строкой на позиции курсора), форматировать текст (панель форматирования), внедрять в текст математические формулы (команда *Insert/Math Region* , при этом надо находится в текстовом блоке), проверять орфографию (*Check Spelling*) для англоязычных текстов, изменять размер шрифта, начертание, цвет текста и т.д. Т.е. для текстовых блоков используются типовые средства редактирования (как в любых текстовых редакторах).

5. *Графический процессор*

Служит для создания графиков. Это очень удобно для вывода результатов математических расчетов в графической форме. Графики могут размещаться в любом логически дозволенном месте документа, т.е. после тех вычислительных блоков системы, которые готовят исходные данные для построения графиков.

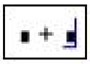
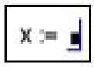
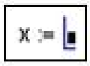
После включения графического процессора для двухмерного графика на экране появляется шаблон будущего графика в виде прямоугольной рамки с маленькими прямоугольниками, расположенными вдоль осей x и y .



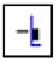
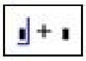
Крайние задают пределы изменения переменных (пределы проставляются системой автоматически, но можно их изменять - для этого в диалоговом окне *Formatting* флажок "*autoscale*" надо отключить), а в средние надо ввести имена аргумента и функции. После нажатия Enter график будет построен. Для форматирования графика достаточно сделать двойной щелчок по полю графика, при этом появится диалоговое окно *Formatting*.

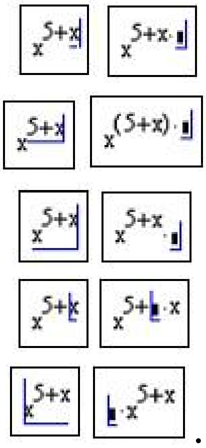
Если строятся графики нескольких функций в одном шаблоне, то имена функций следует разделять запятыми.

6. <u>*Вычислитель(формульный редактор)*</u> обладает поистине уникальными возможностями. Он обеспечивает вычисления по сложным математическим формулам, имеет большой набор встроенных математических формул, позволяет вычислять ряды, суммы и произведения, интегралы и производные, работать с комплексными числами, производить символьные преобразования, решать линейные и нелинейные уравнения, проводить минимизацию функций, выполнять векторные и матричные операции. В вычислитель входят и такие мощные средства, как линейная и сплайн-интерполяция, прямое и обратное быстрое преобразование Фурье.

Для запуска формульного редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна документа, щелкнуть левой кнопкой и начинать ввод. Поместить формулу в документ можно, просто начиная вводить символы , числа  или операторы . Во всех этих случаях на месте курсора ввода создается математическая область (регион) с формулой, содержащей и линии ввода. В области формульного блока курсор ввода превращается в синий уголок, указывающий направление и место ввода . Клавиша «*Insert*» меняет направление охвата курсором  объекта. Для расширения охваченной уголком области (вплоть до полного охвата выражения) нужно пользоваться клавишей «*Пробел*» .

Перемещать линии ввода внутри формульного блока можно также с помощью *клавиш со стрелками* или *щелкая в нужном месте мышью.*

Большинство операций редактирования формул реализованы естественным образом, однако некоторые из них несколько отличаются от общепринятых, что связано с особенностью MathCAD как вычислительной системы, например, вставка операторов. Операторы могут быть унарными (действующими на один операнд)   и бинарными (действующими на два операнда) . При вставке нового оператора в документ MathCAD определяет, сколько операндов ему требуется. Если в точке вставки оператора один или оба операнда отсутствуют, MathCAD автоматически помещает рядом с оператором один или два местозаполнителя. *То выражение* в формуле, которое *выделено линиями ввода* в момент вставки оператора, становится его *первым операндом:*

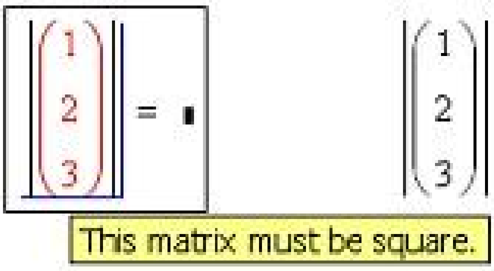

.

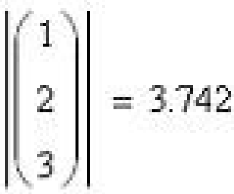
Как видно, MathCAD сам расставляет, если необходимо, скобки, чтобы часть формулы, отмеченная линиями ввода, стала первым операндом. Местозаполнители (черный квадратик– для символа и прямоугольная рамка – для оператора) появляются внутри незавершенных формул . Символ в черный квадратик вводится обычным образом, а чтобы в прямоугольную рамку ввести оператор, например +, необходимо курсор расположить перед этой прямоугольной рамкой  .

Задачи линейной алгебры и решение дифференциальных уравнений в среде MathCAD

В задачах линейной алгебры практически всегда возникает необходимость выполнять различные операции с матрицами. Панель операторов с матрицами находится на панели Math.

Операторы ,  вам уже знакомы. Напомним только, что оператор  вычисляет только детерминант матрицы, а модуль вектора, который равен квадратному корню из суммы квадратов его элементов, вычисляется с помощью оператора , который расположен на панели Calculator. К сожалению, по внешнему виду они не отличаются.





При попытке вычислить модуль вектора с панели Matrix будет ошибочное состояние. Точно также будет ошибочное состояние при попытке вычислить детерминант матрицы с панели Calculator.

Рассмотрим неизвестные вам до сих пор операторы панели Matrix.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=32 \qquad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Скапярное призведение   Векторное призведение $\vec{x}\cdot\vec{y}$ $\vec{x}\times\vec{y}$

Скалярное произведение векторов определяется как скаляр, равный сумме попарных произведений соответствующих элементов (идентичен обычному оператору умножения). Векторы должны иметь одинаковый размер. Для обозначения скалярного произведения используется символ «точка». *Векторное* произведение двух векторов u и v с углом θ между ними равно вектору с модулем $|u|\cdot|v|\cdot\sin(\theta)$, направленным перпендикулярно плоскости векторов u и v. Векторное произведение векторов применимо только для трехкомпонентных векторов. Обозначают векторное произведение символом x, который можно ввести нажатием кнопки на панели Matrix/

Σv - сумма элементов вектора.

$$\sum\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=6 \qquad v:=\begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix} \qquad \sum v=21 \qquad a:=\begin{pmatrix}1&2&5\\7&2&3\\5&6&1\end{pmatrix} \qquad \sum a^{\langle 2\rangle}=9 \qquad \sum\left(a^{T}\right)^{\langle 0\rangle}=8$$

$\overrightarrow{f(M)}$- оператор векторизации. Он позволяет провести *однотипную* операцию над всеми элементами массива (т.е. матрицы или вектора), упрощая тем самым программирование циклов. Например, иногда требуется умножить каждый элемент одного вектора на соответствующий элемент другого вектора. Непосредственно такой операции в MathCAD нет, но ее легко осуществить с помощью векторизации. Оператор векторизации можно использовать только с векторами и матрицами одинакового размера.

Обычное умножение

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=14 \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&36&42\\66&81&96\\102&126&150\end{pmatrix}$$

Векторизация

$$\overrightarrow{\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]}=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\left[\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\right]}=\begin{pmatrix}1&4&9\\16&25&36\\49&64&81\end{pmatrix}$$

Для решения задач линейной алгебры в MathCAD встроены матричные функции. Их можно разделить на три основные группы:

- функции определения (генерации) матриц и операции с блоками матриц;
- функции вычисления различных числовых характеристик матриц;
- функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры.

Из каждой группы приведем по несколько, наиболее часто используемых функций.

Первая группа:

1. matrix(m, n, f) – создает и заполняет матрицу размерности m x n, элемент которой, расположенный в i-ой строке и j-ом столбце равен значению f(i, j) функции f(x, y);
2. diag(v) – создает диагональную матрицу, элементы главной диагонали которой хранятся в векторе v;
3. identity(n) – создает единичную матрицу порядка n;

4. augment(A, B) –объединяет матрицы A и B; матрица B располагается справа от матрицы A, при этом матрицы должны иметь одинаковое число строк;

5. stack(A, B) – объединяет матрицы A и B, матрица B располагается внизу под матрицей A, при этом матрицы должны иметь одинаковое число столбцов;

6. submatrix(A, ir, jr, ic, jc) – формирует матрицу, которая является блоком матрицы A, расположенным в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc, причем ir ≤ jr, ic ≤ jc.

$$f(x,y) := x + y \qquad f1(x,y) := x\cdot y$$

$$m := \mathrm{matrix}(2,3,f) \quad m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad m1 := \mathrm{matrix}(2,3,f1) \quad m1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad mg := \mathrm{diag}(v) \quad mg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad me := \mathrm{identity}(3) \quad me = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad mo := \mathrm{augment}(A,B) \quad mo = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad ms := \mathrm{stack}(A,B) \quad ms = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ 9 & & & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad mb := \mathrm{submatrix}(A,2,3,1,2) \quad mb = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Вторая группа:

1. last(v) – вычисляет номер последнего элемента вектора V;

2. length(v) – вычисляет количество элементов вектора V;

3. min(v), max(v) – вычисляет минимальное и максимальное значения вектора V;

4. Re(v) – создает вектор из реальных частей комплексных элементов вектора V;

5. Im(v) - создает вектор из мнимых частей комплексных элементов вектора V;

6. sort(V) – сортировка элементов вектора V по возрастанию;

7. reverse (sort(v)) – сортировка элементов вектора V по убыванию;

8. csort (A,n) – сортировка элементов n – го столбца матрицы A по возрастанию (перестановкой строк);

9. rsort (A,n) – сортировка элементов n – ой строки матрица A по возрастанию (перестановкой столбцов);

10. rows(A) – вычисляет число строк в матрице A;

11. cols(A) – вычисляет число столбцов в матрице A;

12. max(A), min(A) – определяет максимальное и минимальное значения матрицы A;

13. tr(A) – вычисляет след *квадратной* матрицы A (след матрицы равен сумме ее диагональных элементов по главной диагонали);

14. mean(A) – среднее значение элементов матрица A.

Действие функций второй группы ясно из их названия, поэтому примеры для них приводить не будем.

Третья группа:

1. rref(A) – приведение матрицы к ступенчатому виду с единичным базисным минором (выполняются элементарные операции со строками матрицы: перестановка строк, умножение строки на число, сложение строк);

2. rank(A) – вычисляет ранг матрицы A (количество линейно-независимых строк или это число ненулевых строк ступенчатой матрицы rref(A));

3. eigenvals(A) – вычисление собственных значений *квадратной* матрицы A;

4. eigenvecs (A) – вычисление собственных векторов *квадратной* матрицы A, значением функции является матрица, столбцы которой есть собственные векторы матри-

цы A, причем порядок следования векторов отвечает порядку следования собственных значений, вычисленных с помощью функции eigenvals(A);

5. eigenvec(A,e) – вычисление собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению e;

6. normi(A) – max – норма, или ∞ - норма (infinity norm). в линейной алгебре используются различные матричные нормы, которые ставят в соответствие матрице некоторую скалярную числовую характеристику;

7. lsolve (A,b) – решение системы линейных алгебраических уравнений вида $A \cdot X = b$.

Функции третьей группы реализуют, как правило, довольно сложные вычислительные алгоритмы. Приведем примеры на использование функций rref и функций для вычисления *собственных значений и собственных векторов* матрицы. Задача поиска собственных значений и собственных векторов матрицы очень часто встречается в вычислительной практике.

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rref}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \mathrm{eigenvals}(A) \quad MS := \mathrm{eigenvecs}(A) \quad V1 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_0) \quad V2 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_2)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 5.439 \\ 0.271 \\ -2.71 \end{pmatrix} \quad MS = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.76 & -0.415 \\ 0.321 & -0.611 & -0.432 \\ 0.711 & 0.222 & 0.801 \end{pmatrix} \quad V1 = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.321 \\ 0.711 \end{pmatrix} \quad V2 = \begin{pmatrix} -0.415 \\ -0.432 \\ 0.801 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$X := MS^{\langle 0 \rangle} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot X = \begin{pmatrix} 3.401 \\ 1.744 \\ 3.87 \end{pmatrix} \quad \lambda_0 \cdot E \cdot X = \begin{pmatrix} 3.401 \\ 1.744 \\ 3.87 \end{pmatrix}$$

В самом простом виде задача на собственные значения матрицы формулируется следующим образом: требуется найти такие значения λ, чтобы матричное уравнение $A \cdot X = \lambda \cdot E \cdot X$ имело решение. В таком случае число λ называют собственным числом матрицы А, а n- компонентный вектор X, приводящий уравнение с заданным λ в тождество –собственным вектором. В вышеприведенном примере собственные вектора матрицы А получены в матрице MS. Проверка проведена для первого столбца матрицы MS и соответствующего ему собственного числа λ_0=5.439.

Решение систем линейных алгебраических уравнений. Этот вопрос является центральным в вычислительной линейной алгебре.

В математике рассматриваются системы линейных уравнений двух видов - *однородные и неоднородные.*

Неоднородная система уравнений в матричном виде записывается следующим образом: $A \cdot X = B$. Здесь А – матрица коэффициентов системы, В – вектор свободных членов, X – вектор неизвестных системы.

Неоднородная система имеет *одно единственное* решение, если *определитель* матрицы*отличен* от *нуля.* Для нахождения точного решения неоднородных систем линейных уравнений в линейной алгебре используются три основных метода:

- метод обратной матрицы, он вам уже известен;
- метод исключений Гаусса;

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = -29 \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C := \mathrm{augment}(A, B) \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C1 := \mathrm{rref}(C) \qquad C1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2.379 \\ 0 & 1 & 0 & -1.172 \\ 0 & 0 & 1 & 3.138 \end{pmatrix} \qquad X := C1^{\langle 3 \rangle} \qquad X = \begin{pmatrix} -2.379 \\ -1.172 \\ 3.138 \end{pmatrix} \qquad A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad X = \begin{pmatrix} -2.379 \\ -1.172 \\ 3.138 \end{pmatrix}$$

- метод Крамера.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = -29 \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A1 := \mathrm{augment}(B, \mathrm{submatrix}(A, 0, 2, 1, 2))$$

$$A2 := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A, 0, 2, 0, 0), B, \mathrm{submatrix}(A, 0, 2, 2, 2))$$

$$A3 := \mathrm{augment}(B, \mathrm{submatrix}(A, 0, 2, 0, 1))$$

$$x1 := \frac{|A1|}{|A|} \quad x2 := \frac{|A2|}{|A|} \quad x3 := \frac{|A3|}{|A|} \quad X := \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} -2.379 \\ -1.172 \\ 3.138 \end{pmatrix}$$

Неоднородная система линейных уравнений в случае *равенства ее определителя нулю*имеет множество решений, если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, либо не имеет решения, если это условие не выполняется. Решить такие системы в MatCADe можно методом Гаусса.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad B2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad |A| = 0$$

$$Ar1 := \mathrm{augment}(A, B1)$$
$$Ar2 := \mathrm{augment}(A, B2)$$

$\mathrm{rank}(A) = 3 \quad \mathrm{rank}(Ar1) = 4 \quad \mathrm{rank}(Ar2) = 3$

Система $A \cdot X = B1$ не имеет решения

Система $A \cdot X = B2$ имеет решение

$$\mathrm{rref}(Ar2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу Ar2 к ступенчатому виду

за базисные переменные примем - x1, x2, x3
за свободные переменные примем - x4, x5

Given

$$x1 - x4 - x5 = 2$$
$$x2 + x4 + x5 = -1$$
$$x3 = 3$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{pmatrix} x4 + x5 + 2 \\ -x4 - x5 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$X(x4, x5) := \begin{pmatrix} x4 + x5 + 2 \\ -x4 - x5 - 1 \\ 3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot X(x4, x5) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Частные решения

$$X(1,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X(0,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot X(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad A \cdot X(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

В выше приведенном примере получили систему из трех уравнений с пятью неизвестными, поэтому решение системы будет иметь два свободных параметра (x4, x5).

Однородная система линейных алгебраических уравнений может быть представлена в виде $A \cdot X = 0$, т.е. правая часть уравнения представляет вектор из нулевых элементов. Как известно, для того чтобы однородная система линейных уравнений имела решение, *определитель* соответствующей матрицы должен *равняться нулю*. Это означает, что количество независимых уравнений в системе (т.е. ранг матрицы) меньше, чем количество неизвестных (т.е. порядок матрицы): rank(A) < n. Но вначале нужно выделить в системе эти самые независимые уравнения. Это делается с помощью функции *rref*, которая с помощью метода исключений Гаусса приводит матрицу к ступенчатому виду.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \\ 3 & 12 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 10 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0 \qquad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Система $A \cdot X = 0$ имеет решение

Определитель = 0, $\mathrm{rank}(A) < 5$

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу А к ступенчатому виду

за базисные переменные примем - x1, x2, x5

за свободные переменные примем - x3, x4

Given

$$x1 - 2x3 - 8x4 = 0$$

$$x2 + x3 + 2x4 = 0$$

$$x5 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x5) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x3 + 8 \cdot x4 \\ -x3 - 2 \cdot x4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$X(x3, x4) := \begin{pmatrix} 2 \cdot x3 + 8 \cdot x4 \\ -x3 - 2 \cdot x4 \\ x3 \\ x4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot X(x3, x4) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Частные решения

$$X(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X(0,1) = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot X(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \cdot X(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Дифференциальные уравнения являются основой огромного количества расчетных задач из самых различных областей науки и техники.

В MathCAD нет средств символьного (точного) решения дифференциальных уравнений, но достаточно хорошо представлены численные методы их решения. Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которых неизвестные являются *не переменные* (т.е. числа), а *функции* одной или нескольких переменных. Эти уравнения (или системы) включают соотношения между искомыми функциями и их производными. Если в уравнения входят производные только по одной переменной, то они *называются обыкновенными дифференциальными* уравнениями (ОДУ). В противном случае говорят об уравнениях *в частных производных.* Таким образом, *решить* (иногда говорят проинтегрировать) дифференциальное уравнение – значит, *определить неизвестную функцию* на определенном интервале изменения ее переменных.

Как известно, одно обыкновенное дифференциальное уравнение или система ОДУ имеет *единственное* решение, если помимо уравнения определенным образом заданы*начальные или граничные* условия. Имеется два типа задач, для которых возможно численное решение ОДУ с помощью MathCAD:

- *задачи Коши*, для которых определены начальные условия на искомые функции, т.е. заданы значения этих функций в начальной точке интервала интегрирования уравнения;
- *краевые задачи*, для которых заданы определенные соотношения сразу на обеих границах интервала. Из дифференциальных уравнений *в частных производных* есть возможность решать только уравнения с *двумя независимыми переменными*: *одномерныепараболические и гиперболические* уравнения, такие как уравнения теплопроводности,

диффузии, волновые уравнения, а также *двухмерные эллиптические* уравнения (уравнения Пуассона и Лапласа).

В MathCAD нет универсальной функции для решения дифференциальных уравнений, а есть около двадцати функций для различных видов уравнений, дополнительных условий и методов решения. Эти функции можно найти в библиотеке Insert/Function, категория “Differential Equation Solving (решение дифференциальных уравнений).

Решение Обыкновенных Дифференциальных Уравнений (ОДУ)

ОДУ первого порядка называется уравнение:

$F(x,y,y')=0$

где: F – известная функция трех переменных;

x – независимая переменная на интервале интегрирования[a,b];

y – неизвестная функция;

y' – ее производная.

Функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения, если она при всех $x\in[a,b]$ удовлетворяет уравнению:

$F(x,y(x),y'(x))=0$

График решения $y(x)$ называется интегральной кривой дифференциального уравнения. Если не заданы начальные условия, таких решений $y(x)$ будет множество. При известных начальных условиях $y(x_0)= y_0$ решение $y(x)$ будет единственным. *Вычислительный процессор MathCAD может работать только с нормальной формой* ОДУ. *Нормальная форма* ОДУ – это ОДУ, разрешенное относительно производной $y'=f(x,y)$.

ОДУ высших порядков

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x,y,y',y'', \dots,y^{(n)})=0$$

где: F – известная функция n+2 переменных;

x – независимая переменная на интервале интегрирования[a,b];

y – неизвестная функция;

n – порядок уравнения.

Функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения, если она при всех $x \in [a,b]$ удовлетворяет уравнению:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x),\dots, y^{(n)}(x))=0$$

Нормальная форма ОДУ высшего порядка имеет вид:

$$Y^{(n)} =f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Если не заданы начальные условия, то дифференциальное уравнение n – го порядка имеет бесконечное множество решений, при задании начальных условий $y(x_0)= y_0$, $y'(x_0)= y_{0,1}$, $y''(x_0)= y_{0,2}$, …, $y^{(n-1)}(x_0)= y_{0,n-1}$ решение становится единственным (задача Коши).

Задача Коши для дифференциального уравнения n – го порядка может быть сведена к задаче Коши для нормальной системы n дифференциальных уравнений 1 го порядка, которая в векторной форме имеет вид:

$$Y' = F(x, Y),\ Y(x_0) = Y_0$$

где: $Y(x_0) = Y_0$ – вектор начальных условий;

$Y'=(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ – вектор первых производных;

F(x, Y) = $(y_2, y_3, \ldots, y_n, f(x, y_1, \ldots, y_n))$ – вектор правых частей;

$Y = (y_2, y_3, \ldots, y_n)$ – вектор искомого решения.

Эта система получается в результате следующей замены:

$$\begin{cases} y = y_1 \\ y' = y_1' = y_2 \\ y'' = y_2' = y_3 \\ y''' = y_3' = y_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n \\ y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \text{,где } \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \ldots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \ldots \\ y_n \\ f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{bmatrix}$$

Для численного интегрирования ОДУ в MathCAD имеется выбор – либо использовать вычислительный блок ***Given/Odesolve***, либо встроенные функции. Оба способа обладают одинаковыми возможностями, но при использовании блока решения запись уравнений более привычна и наглядна, однако отдельная функция может быть использована в составе других функций и программ. Рассмотрим оба варианта решения.

Вычислительный блок Given/Odesolve

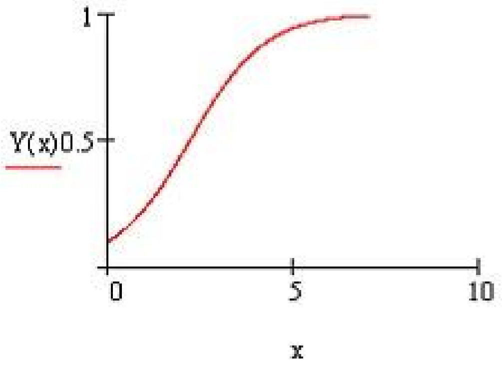
Ниже приведены два примера для решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка с использованием вычислительного блока решения Given/Odesolve.

Пример.

given

$y'(x) = y(x) - y(x)^2 \qquad y(0) = 0.1$

$Y := \text{odesolve}(x, 10) \qquad x := 0, 0.01 .. 10$



$Y(1) = 0.232$

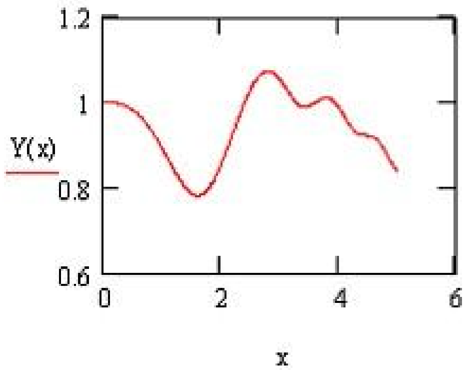
$Y(3) = 0.691$

given

$y''(x) = \sin\left(y'(x) - x \cdot y(x) + x^2\right) \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

$Y := \text{odesolve}(x, 5)$

$x := 0, 0.01 .. 5$



$Y(1) = 0.892$

$Y(3) = 1.053$

Вычислительный блок для решения одного ОДУ состоит из трех частей:

- ключевое слово given;
- ОДУ и начальные условия, записанные с помощью логического равенства;

- встроенная функция Odesolve(x, b) относительно независимой переменной x на интервале [a, b]; b – верхняя граница отрезка интегрирования. Допустимо и даже предпочтительнее задание функции Odesolve(a, b, step) с тремя параметрами, где step –внутренний параметр численного метода, определяющий количество шагов; чем больше step, тем с лучшей точностью будет получен результат, но тем больше времени будет затрачено на его поиск.

Функция Odesolve возвращает решение задачи в виде функции. Эта функция не имеет символьного представления и может только вернуть численное значение решения уравнения в любой точке интервала интегрирования.

Функция Odesolve использует для решения дифференциальных уравнений наиболее популярный алгоритм Рунге-Кутта четвертого порядка, описанный в большинстве книг по методам вычислений. Он обеспечивает малую погрешность для широкого класса систем ОДУ за исключением жестких систем. Если щелчком правой кнопки мыши на блоке формул с функцией Odesolve вызвать контекстное меню, то можно изменить метод вычисления решения, выбрав один из трех вариантов: Fixed – метод Рунге-Кутта с фиксированным шагом интегрирования (этот метод используется по умолчанию), Adaptive – также метод Рунге-Кутта, но с переменным шагом, изменяемым в зависимости от скорости изменения функции решения, Stiff – метод, адаптированный для решения жестких уравнений и систем (используется так называемый метод PADAUS).

Альтернативный метод решения ОДУ заключается в использовании одной из встроенных функций: ***rkfixed, Rkadapt, или Bulstoer***. Все они решают задачу Коши для *системы* дифференциальных уравнений *первого порядка,* но каждая из них использует для этого свой метод. Для *простых* систем не играет большой роли, какой метод использовать –все равно получите решение достаточно быстро и с высокой точностью.

Но для *сложных* или *специфических* систем бывает, что некоторые методы вообще не могут дать удовлетворительного решения за приемлемое время. Именно для таких сложных, но не редких случаев в MathCAD и введено несколько различных методов решения систем ДУ.

- ***rkfixed*** – метод Рунге-Кутта с фиксированным шагом интегрирования. Самый простой и быстрый метод, но далеко не всегда самый точный. Полностью аналогичен использованию функции Odesolve с выбранным в контекстном меню методом Fixed.
- ***Rkadapt*** – метод Рунге-Кутта с переменным шагом интегрирования. Величина шага адаптируется к скорости изменения функции решения. Данный метод позволяет эффективно находить решения уравнений, в случае если оно содержит как плавные, так и быстро меняющиеся участки. Там, где решение меняется слабо, шаги выбираются более редкими, а в областях его сильных изменений – частыми. В результате для достижения одинаковой точности требуется меньшее число шагов, чем для rkfixed. Полностью аналогичен использованию функции Odesolve с выбранным в контекстном меню методом Adaptive.
- ***Bulstoer*** – метод Булирша – Штера. Этот метод более эффективен, чем метод Рунге-Кутта, в случае если решение является плавной функцией.

Имена функций Rkadapt и Bulstoer начинаются с прописной буквы. В MathCAD для некоторых имен функций неважно, с какой буквы они записаны, но для перечисленных функций это принципиально, т.к. в MathCAD также существуют функции с такими же именами, только записанные с маленькой буквы – rkadap, bulstoer. Эти функции используются в тех случаях, когда важным является решение задачи в конечной точке интервала интегрирования.

Пример.

ORIGIN := 1

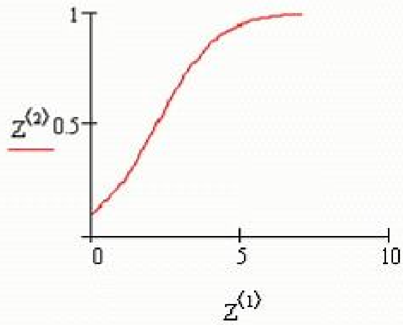
a := 0 b := 10 n := 100 y := 0.1

$f(x,y) := y - y^2$

$F(x,y) := f(x, y_1)$ Z := rkfixed(y, a, b, n, F)

Z =

	0	1	2
0	0	0.1	
1	0.1	0.109	
2	0.2	0.119	
3	0.3	0.13	
4	0.4	0.142	
5	0.5	0.155	
6	0.6	0.168	
7	0.7	0.183	
8	0.8	0.198	



ORIGIN := 1

a := 0 b := 5 n := 100 $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

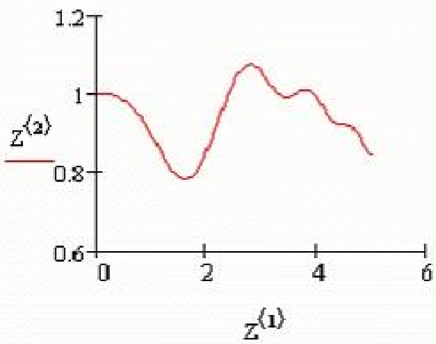
$f(x,y,y') := \sin(y' - x \cdot y + x^2)$

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ f(x, y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

Z := rkfixed(y, a, b, n, F)

Z =

	0	1	2
0	0	1	0
1	0.05	1	$-1.229 \cdot 10^{-3}$
2	0.1	1	$-4.825 \cdot 10^{-3}$
3	0.15	0.999	-0.011
4	0.2	0.999	-0.019
5	0.25	0.998	-0.028
6	0.3	0.996	-0.04
7	0.35	0.994	-0.053
8	0.4	0.991	-0.067



Выше приведены примеры решения тех же дифференциальных уравнений первого и второго порядка, которые были решены с использованием вычислительного блока Given/Odesolve.

Применение встроенных функций в документах MathCAD выглядит сходным образом, т.е. функции Rkadapt и Bulstoer имеют тот же синтаксис, что и выше приведенная функция rkfixed. Назначение аргументов в этих встроенных функциях следующее:

- y – вектор начальных значений неизвестных функций, входящих в систему. В случае одного уравнения и одной неизвестной функции – это просто число.
- a – начало отрезка, на котором ищется решение системы (отрезка интегрирования). Именно в этой точке значения неизвестных функций принимаются равными элементам вектора y.
- b – конец отрезка интегрирования.
- n – количество частей, на которые разбивается отрезок [a, b] при решении системы. Чем больше это число, тем точнее получается решение, но расчет занимает больше времени.
- F(x,y) – векторная функция, элементы которой содержат правые части уравнений системы в *нормальной форме* (когда левые части – первые производные от соответствующих функций, а в правых частях производные отсутствуют). Аргументами этой функции являются вектор y, элементы которого соответствуют различным неизвестным функциям системы, и скалярный аргумент x , соответствующий независимой переменной в системе. В случае одного уравнения функция F может быть скалярной функцией, зависящей от двух скалярных переменных x и y.

Возвращаемым значением всех вышеперечисленных встроенных функций является матрица. Первый столбец этой матрицы – это точки, на которые разбивается отрезок [a, b], а остальные столбцы – это значения функций системы в этих точках. Если в аргументе функции rkfixed было указано количество частей n = 100, то матрица будет содержать 101 строку вместе с начальной.

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для численного интегрирования систем ОДУ в MathCAD также имеется выбор – либо использовать вычислительный блок Given/Odesolve, либо встроенные функции rkfixed, Rkadapt и Bulstoer.

При решении систем ОДУ MathCAD требует, чтобы система ОДУ была представлена в нормальной форме (когда левые части – первые производные от соответствующих функций, а в правых частях производные отсутствуют):

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

где Y и Y' – соответствующие неизвестные векторные функции переменной t, а F –вектор правых частей системы уравнений первого порядка. Именно векторное представление используется для ввода системы ОДУ в среде MathCAD.

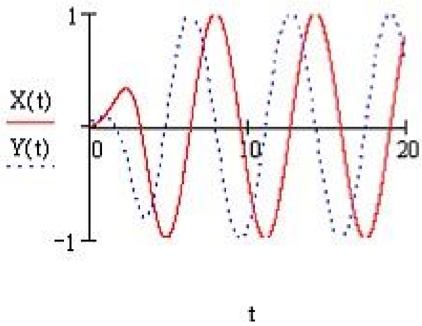
Если в систему ОДУ входят и *уравнения высших порядков*, то оно тоже сводится к системе уравнений первого порядка, как было показано выше. При этом количество нулевых условий для вычислительного блока Given/Odesolve, а также размер вектора начальных условий y и размер вектора правых частей F(x,y) для встроенных функций rkfixed, Rkadapt и Bulstoer должны быть равны *сумме порядков всех уравнений.*

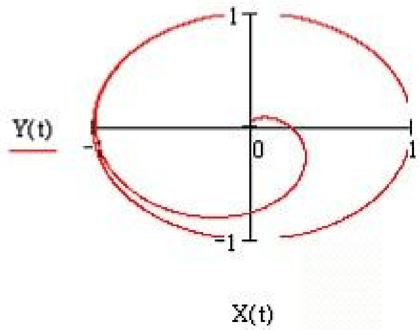
Вначале покажем решение систем ОДУ первого порядка с использованием вычислительного блока Given/Odesolve given

$$x'(t) = y(t) + \left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right)\cdot x(t)$$

$$y'(t) = -x(t) + \left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right)\cdot y(t) \qquad x(0) = 0 \qquad y(0) = 0.05$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \text{odesolve}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t, 20\right] \qquad t := 0, 0.01 .. 20$$





Функция Odesolve для системы ОДУ имеет несколько иной, по сравнению с одним уравнением, синтаксис. Теперь она возвращает вектор функций, составляющих решение системы. Поэтому в качестве первого аргумента функции нужно ввести вектор, состоящий из имен функций, использованных при вводе системы. Второй и третий аргументы то же самое, что и в задаче с одним ОДУ.

Решение системы ОДУ показано на графике слева. Как известно, решения ОДУ часто удобнее изображать не в таком виде, а в фазовом пространстве, по каждой из осей которого откладываются значения каждой из найденных функций (как показано на рисунке справа). При этом аргумент входит в них лишь параметрически. В рассматриваемом случае двух ОДУ такой график – *фазовый портрет системы* – является кривой на фазовой плоскости. В общем случае, если система состоит из N ОДУ, то фазовое пространство является N –мерным. При N > 3 наглядность теряется, и для визуализации фазового портрета приходится строить его различные проекции.

Рассмотрим решение этой же системы ОДУ первого порядка с использованием встроенной функции rkfixed.

Пример.

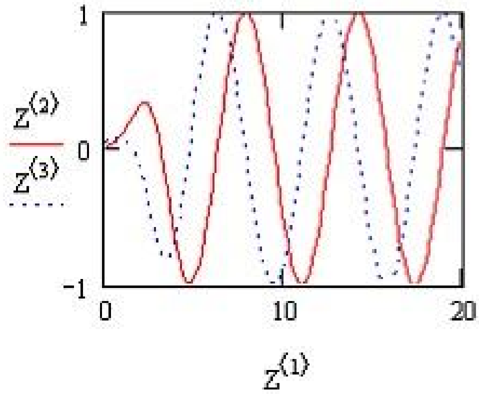
ORIGIN := 1

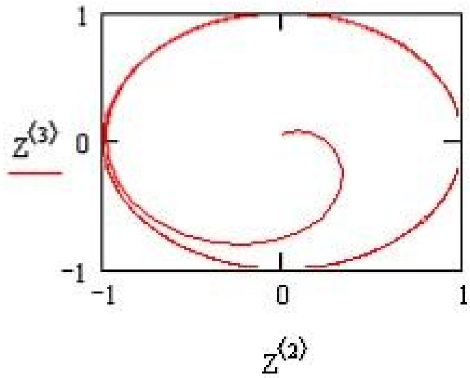
$$x'(t) = y(t) + \left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right) \cdot x(t)$$

$$y'(t) = -x(t) + \left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right) \cdot y(t)$$

$a := 0 \qquad b := 20 \qquad n := 100 \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.05 \end{pmatrix}$

$$F(t,y) := \begin{bmatrix} y_2 + \left[1 - (y_1)^2 - (y_2)^2\right] \cdot y_1 \\ -y_1 + \left[1 - (y_1)^2 - (y_2)^2\right] \cdot y_2 \end{bmatrix} \qquad Z := \mathrm{rkfixed}(y, a, b, n, F)$$





Полученное решение полностью соответствует вышеприведенному решению с использованием вычислительного блока Given/Odesolve. Следует отметить, что начальные условия здесь задаются в виде вектора y, а функциям x(t) и y(t) соответствуют элементы этого вектора y_1 и y_2. Вектор начальных условий y и вектор правых частей F имеют размер равный двум, т.к. система состоит из двух уравнений первого порядка. Для системы ОДУ, состоящей из двух уравнений второго порядка, размер этих векторов будет равен четырем:

$$y := \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \qquad F(t,y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ f1(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ y_3 \\ f2(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \end{pmatrix}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ: