Глава 3. Векторные пространства

§9 n-мерные векторы. Линейные операции над n-мерными векторами. Понятие линейного векторного пространства

Определение 1. Упорядоченный набор чисел, записанный в виде $\bar{x}=(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$, называется ***n - мерным вектором***, где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ - его координаты или компоненты $\left(\bar{x} \in E^n\right)$.

Понятие ***n*** - мерного вектора широко используется в экономике: некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\bar{x}=(x_1; x_2 \ldots x_n)$, а соответствующие цены - вектором $\bar{y}=(y_1; y_2 \ldots y_n)$.

Векторы можно:

1) умножать на действительное число:

$\lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \ldots \lambda x_n);$

2) складывать:

$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots\ x_n + y_n).$

Эти операции обладают следующими **свойствами**:

1. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ - переместительное (коммутативное).
2. $\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}$ - сочетательное (ассоциативное)
3. $\alpha(\beta \cdot \overline{x}) = (\alpha \cdot \beta)\overline{x}$ - ассоциативное относительно числового множителя
4. $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$ - распределительное (дистрибутивное)
5. $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$ - дистрибутивное относительно суммы числовых множителей.
6. Существует нулевой вектор $\overline{0} = (0, 0, \ldots 0)$ такой, что $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$
7. Для любого вектора $\overline{x}$ существует противоположный вектор $(-\overline{x})$ такой, что $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$

8. $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$ - для любого вектора $\overline{x}$.

Определение 2. Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены действия $\boxed{\overline{x} + \overline{y}}$ и $\boxed{\lambda \overline{x}}$, удовлетворяющие 8- ми свойствам (аксиомам), называется ***линейным векторным пространством***.

§10.1 Линейная зависимость векторов

Определение 1. Вектор $\overline{a_m}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_{m-1}}$ векторного пространства R, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа:

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{a_m} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} + \\ + \ldots + \lambda_{m-1} \overline{a_{m-1}}\end{gathered}} \qquad (1)$$

Определение 2. Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_m}$ векторного пространства R^n называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что:

$$\boxed{\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_m \overline{a_m} = \overline{0}} \qquad (2)$$

В противном случае векторы называются ***линейно независимыми*** (два неколлинеарных вектора).

Пример: Даны три вектора: $\overline{a_1}(1;3)$; $\overline{a_2}(2;1)$; $\overline{a_3}(5;2)$.

Доказать, что векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ линейно независимы и выразить вектор $\overline{a_3}$ через $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$.

Решение:

1) Докажем линейную независимость векторов:

$$\lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2} = \overline{0}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Такая система всегда имеет тривиальное нулевое решение.

Убедимся, что других решений эта система не имеет:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет только нулевое решение, значит, векторы линейно независимы.

2) Выразим вектор $\overline{a_3}$:

$$\overline{a_3} = \lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \\ -5\lambda_2 = -13 \end{cases} \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{5} \quad \lambda_2 = \frac{13}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\overline{a_3} = -\frac{1}{5}\overline{a_1} + \frac{13}{5}\overline{a_2}}$$

§10.2 Базис и размерность линейного векторного пространства

Определение 1. Линейное пространство R называется ***n- мерным***, если в нем существует ***n*** - линейно независимых векторов.

Определение 2. Максимальное число (***n***) содержащихся в пространстве R линейно

независимых векторов называется ***размерностью пространства*** и обозначается *dim (R)*.
Обозначение n-мерного пространства: R^n

Определение 3. Совокупность ***n*** линейно независимых векторов пространства R^n называется ***базисом***.

$(\bar{i}\,;\,\bar{j})$ – базис в R^2

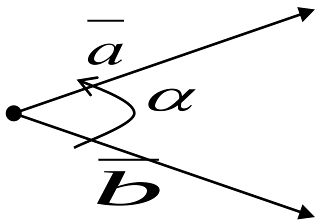
$(\bar{i}\,;\,\bar{j}\,;\,\bar{k})$ – базис в R^3

Определение 4. Если $\overline{e_1}\,;\overline{e_2}\,;\overline{e_3}\,...\overline{e_n}$ - базис пространства *R*, то вектор $\boxed{\bar{x} = x_1 \cdot \overline{e_1} + x_2 \cdot \overline{e_2} + x_3 \cdot \overline{e_3} + \ldots + x_n \cdot \overline{e_n}}$ называется ***разложением вектора*** $\bar{x}$ по базису, а числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ - ***координатами вектора*** $\bar{x}$ относительно этого базиса.

§11.1 Скалярное произведение двух векторов в R^2 и R^3

Определение 1. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в R^2 и R^3 называется число, равное произведению их модулей на cos угла между ними.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\alpha}$$



Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ - произведение векторов коммутативно.

2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^2=\left|\bar{a}\right|^2$$

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\cos 0°=\left|\bar{a}\right|^2 \Rightarrow \boxed{\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}^2}}$$

3) Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \left|\bar{i}\right|^2 = 1; \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = \left|\bar{i}\right| \cdot \left|\bar{j}\right| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$\left(x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}\right) =$$

$$= x_1 \cdot \bar{i} \cdot x_2 \cdot \bar{i} + \cancel{x_1 \cdot \bar{i} \cdot y_2 \cdot \bar{j}} + \cancel{x_1 \cdot \bar{i} \cdot z_2 \cdot \bar{k}} +$$
$$+ \cancel{y_1 \cdot \bar{j} \cdot x_2 \cdot \bar{i}} + y_1 \cdot \bar{j} \cdot y_2 \cdot \bar{j} +$$

$$+ \cancel{y_1 \cdot \bar{j} \cdot z_2 \cdot \bar{k}} + \cancel{z_1 \cdot \bar{k} \cdot x_2 \cdot \bar{i}} +$$
$$+ \cancel{z_1 \cdot \bar{k} \cdot y_2 \cdot \bar{j}} + z_1 \cdot \bar{k} \cdot z_2 \cdot \bar{k} =$$

$$= \boxed{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти cos угла между двумя векторами:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}}$$

В координатной форме:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

Пример:

$\overline{a} = (1;\ 2;\ -2)$; $\overline{b} = (2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k})$

$\varphi(\overline{a}\ \hat{;}\ \overline{b}) - ?$

$\overline{b} = (2;\ -1;\ 2)$

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} =$$

$$= -\frac{4}{3\cdot 3} = -\frac{4}{9}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) = \pi - \arccos\frac{4}{9}$$

§11.2 Скалярное произведение двух векторов. Евклидово пространство

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов $\overline{x} = (x_1;\ x_2\ \ldots x_n)$ и $\overline{y} = (y_1;\ y_2\ \ldots y_n)$ называется число

$$\boxed{\overline{x}\cdot\overline{y} = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \ldots + x_n\cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i}$$

Скалярное произведение имеет экономический смысл: если вектор $\overline{x}=(x_1; x_2 \ldots x_n)$ - объем различных товаров, а $\overline{y}=(y_1; y_2 \ldots y_n)$ - вектор их цен, то $\overline{x}\cdot\overline{y}$ - выражает суммарную стоимость товаров.

Скалярное произведение обладает **свойствами:**

1. $\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{y}\cdot\overline{x}$ - коммутативность
2. $\overline{x}\cdot(\overline{y}+\overline{z})=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{z}$ - дистрибутивность
3. $\alpha\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}=\alpha(\overline{x}\cdot\overline{y})$ - ассоциативность
4. $\overline{x}\cdot\overline{x}>0$, если $\overline{x}$ - ненулевой вектор
   $\overline{x}\cdot\overline{x}=0$, если $\overline{x}=\overline{0}$


Евклид

Определение 2. Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырем свойствам (аксиомам), называется ***евклидовым пространством.*** Обозначение n-мерного евклидова пространства $\mathbf{E}^{\mathbf{n}}$

Определение 3. Длиной или ***нормой вектора*** $\overline{x}$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$\boxed{\left|\overline{x}\right| = \sqrt{\overline{x}\cdot\overline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}$$

Норма вектора обладает **свойствами:**

1. $\left|\overline{x}\right| = 0$, если $\overline{x} = \overline{0}$
2. $\left|\lambda\cdot\overline{x}\right| = \left|\lambda\right|\cdot\left|\overline{x}\right|$, где λ - действительное число
3. $\left|\overline{x}\cdot\overline{y}\right| \le \left|\overline{x}\right|\cdot\left|\overline{y}\right|$ - неравенство Коши-Буняковского
4. $\left|\overline{x}+\overline{y}\right| \le \left|\overline{x}\right| + \left|\overline{y}\right|$ - неравенство треугольника

В евклидовом пространстве можно тоже находить $\cos$ угла между двумя векторами:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{\left|\overline{x}\right|\cdot\left|\overline{y}\right|}}$$

, где $0 \le \alpha \le \pi$.

Из полученной формулы следует, что для n-мерных векторов справедливо определение скалярного произведения, данного для трехмерных векторов.

Определение 4. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению их длин на cos угла между ними.

$$\boxed{\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\alpha}$$

Определение 5. Два вектора называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{\pi}{2}$$

Определение 6. Два вектора считаются коллинеарными если их координаты пропорциональны.

Определение 7. Векторы $\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3}\ldots\overline{e_n}$ n - мерного евклидова пространства образуют ***ортонормированный базис,*** если эти векторы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице, т.е. если

$$\overline{e_i}\cdot\overline{e_j}=0 \text{ при } i\neq j \quad \text{и} \quad \left|\overline{e_i}\right|=1 \text{ при } i=1,2,\ldots,n$$

Во всяком n – мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пример:

$$\overline{i}\perp\overline{j} \quad ; \quad \left|\overline{i}\right|=\left|\overline{j}\right|=1 \quad \Rightarrow$$

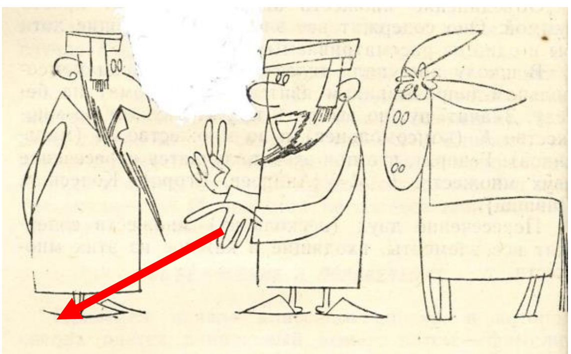
E^2: базис $\left(\overline{i}\,;\,\overline{j}\right)$ – ортонормированный

$$\overline{i}\perp\overline{j} \quad ; \quad \overline{j}\perp\overline{k} \quad ; \quad \overline{k}\perp\overline{i} \quad ;$$

$$\left|\overline{i}\right|=\left|\overline{j}\right|=\left|\overline{k}\right|=1 \quad \Rightarrow$$

E^3: базис $\left(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\right)$ – ортонормированный

§12 Линейные операторы



Определение 1. ***Оператором*** (отображением) линейного векторного пространства называют функцию, определенную на множестве векторов

данного пространств и со значениями во множестве векторов пространства:

Определение 2. Оператор φ данного пространства называется ***линейным,*** если для любых векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x}$ этого пространства выполняются соотношения:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\quad \varphi\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}\right)=\varphi\left(\overline{x_1}\right)+\varphi\left(\overline{x_2}\right) \\ 2)\quad \varphi\left(\lambda\cdot\overline{x}\right)=\lambda\cdot\varphi\left(\overline{x}\right) \end{array}}$$

Теорема. Всякая матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ определяет в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ линейный оператор φ по закону:

$$\boxed{\overline{y}=A\cdot\overline{x}} \qquad ,\text{где } \overline{x}, \overline{y}\in R^n$$

В развернутом виде этот закон можно записать так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \quad \dots\dots \quad \dots \quad \dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$

Матрица, о которой говорится в теореме, называется ***матрицей линейного оператора φ*** и обозначается $\underline{A_\varphi}$.

Равные матрицы задают равные линейные операторы, поэтому линейный оператор, целиком определяется своей матрицей.

<u>Примеры линейных операторов:</u>

1) **<u>Нулевой</u>** оператор, задаваемый нулевой матрицей:

$A_\varphi \cdot \overline{x} = \overline{0}$ - все векторы переходят в нуль - вектор

2) **<u>Тождественный</u>** оператор ε, заданный единичной матрицей E:

$A \cdot \overline{x} = \overline{x}$ - все векторы переходят в себя

3) Оператор **<u>подобия</u>** в E^2 задается матрицей $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Этот оператор каждый вектор $\{x; y\}$ переводит в вектор $\{x'; y'\}$ по формулам:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Алгебра линейных операторов

При сложении линейных операторов их **матрицы складываются**.

При умножении оператора на число, его **матрица также умножается** на это число.

При умножении операторов их **матрицы перемножаются**.

Матрица обратного оператора **равна обратной матрице** исходного оператора.

§13 Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Определение 1. Ненулевой вектор $\bar{r} \in R^n$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора φ, если под действием φ этот вектор переходит в коллинеарный ему вектор $\lambda \cdot \bar{r} \in R^n$, т.е.

$$\boxed{\varphi(\bar{r}) = \lambda \cdot \bar{r}} \quad \text{или} \quad \boxed{A_\varphi \cdot \bar{r} = \lambda \cdot \bar{r}}$$

При этом число λ называется ***собственным числом*** оператора φ.

Займемся теперь вопросом о нахождении собственных векторов и собственных чисел линейного оператора.

Пусть в $\boldsymbol{R}^2$ φ: $\bar{r} \to \bar{r}'$, т.е. $\varphi\left(\bar{r}\right) = \bar{r}'$, где $\bar{r} = \{x; y\}$; $\bar{r}' = \{x'; y'\}$

Тогда оператор φ можно задать формулами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad (1)$$

или матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы $\bar{r}$ был собственным вектором с собственным числом λ,

нужно чтобы $\bar{r}' = \lambda \cdot \bar{r}$, т.е. $x' = \lambda x$; $y' = \lambda y$

Подставляя эти формулы в систему (1), получим:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y = 0 \end{cases} \qquad (2).$$

Полученной системе (2) должны удовлетворять координаты собственных векторов и собственные числа. Эта система однородная, следовательно, она имеет ненулевое решение при условии $\Delta = 0$. Таким образом:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0} \qquad (3).$$

Это так называемое **характеристическое уравнение** оператора φ, из которого можно находить собственные числа λ, а затем, используя систему (2), находить собственные векторы, соответствующие этим λ.

Характеристическое уравнение часто записывают в более компактной форме. Преобразуем левую часть:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| =$$
$$= \left| A_{\varphi} - \lambda \cdot E \right|$$

Получим: $\boxed{\left| A_{\varphi} - \lambda \cdot E \right| = 0}$ - характеристическое уравнение.

Пример: Найти собственные векторы и собственные числа линейного оператора φ, заданного формулами:

$$\begin{cases} x' = 11x + 12y \\ y' = 12x + 4y \end{cases}$$

Решение:

1) Составляем характеристическое уравнение:

$$|A_\varphi - \lambda \cdot E| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 11-\lambda & 12 \\ 12 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0$$

$\lambda_1 = 20; \quad \lambda_2 = -5$ – собственные числа

2) Для нахождения собственных векторов составляем систему (2):

$$\begin{cases} (11-\lambda)x + 12y = 0 \\ 12x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

а) при $\lambda_1 = 20$

$$\begin{cases} -9x + 12y = 0 \\ 12x - 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \{-3x + 4y = 0\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{c\,;\frac{3}{4}c\right\}$$

Таким образом, числу $\lambda_1 = 20$ соответствует семейство свободных векторов $\left\{c\,;\frac{3}{4}c\right\}, \quad c \in R$;

б) при $\lambda_2 = -5$ $\begin{cases} 16x + 12y = 0 \\ 12x + 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{4x + 3y = 0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{c\,; -\frac{4}{3}c\right\}$$

Значит, собственному числу $\lambda_2 = -5$ соответствует подпространство свободных векторов $\left\{c\,; -\frac{4}{3}c\right\}$ $c \in R$

Ответ: имеем собственные числа $\lambda_1 = 20$; $\lambda_2 = -5$ и соответствующие семейства свободных векторов $\left\{c\,; \frac{3}{4}c\right\}; \left\{c\,; -\frac{4}{3}c\right\}$.

Отметим, что приведенные рассуждения аналогичны и для $\boldsymbol{R}^3$ и $\boldsymbol{R}^n$.