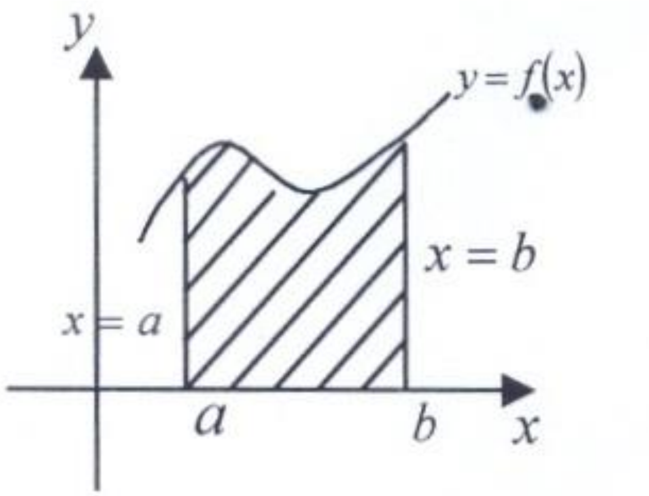
Глава 7. Интегральное исчисление.

Часть 2. Определённый интеграл.

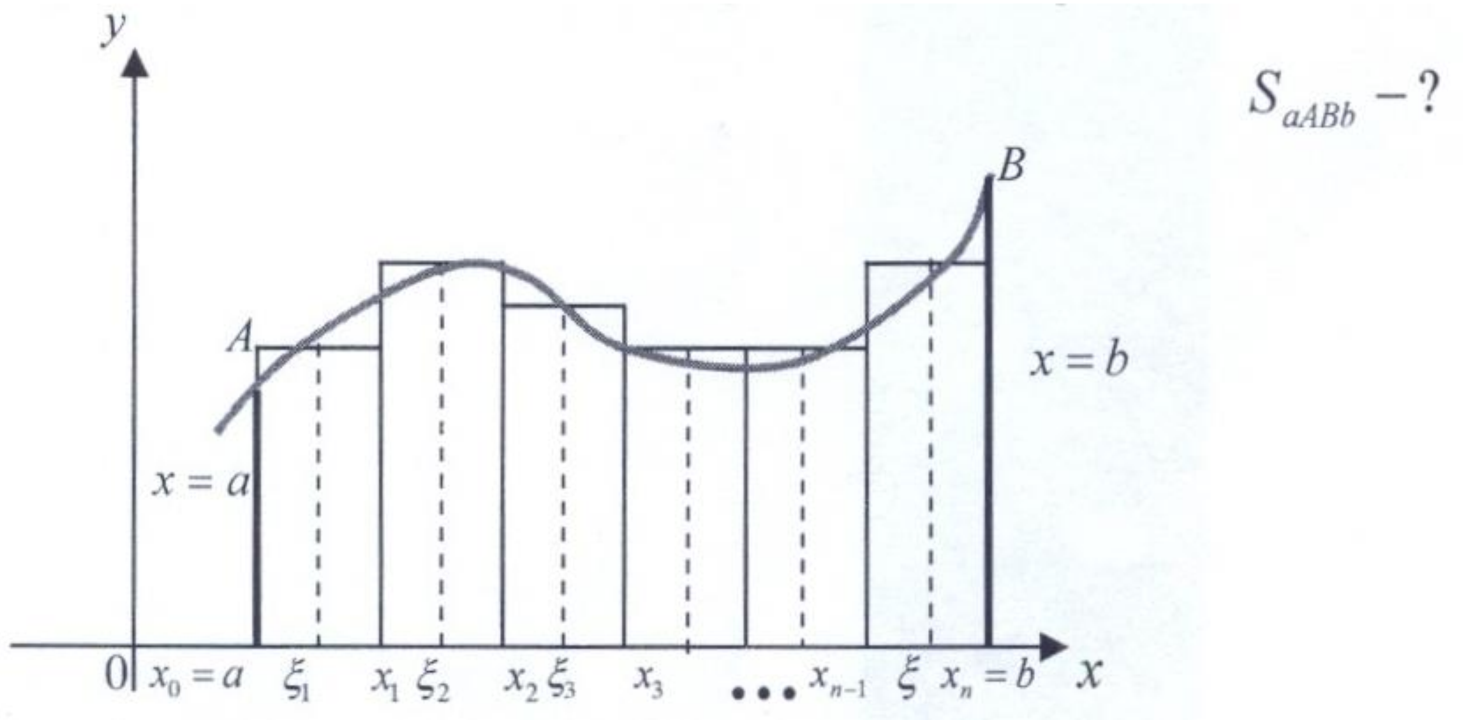
§1. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла (задача о площади криволинейной трапеции).

Определение 1. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная частью кривой $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси OX и двумя прямыми: $x = a$ и

$x = b$ параллельными оси OY.



Решим задачу о нахождении площади этой криволинейной трапеции.



Разобьем отрезок $[a; b]$ на *«n»* частей точками

$a = x_0;\ x_1;\ x_2 \ldots x_n = b$

Через каждую точку разбиения проведем прямые параллельные оси ОУ до пересечения с кривой.

Тогда площадь трапеции может быть представлена в виде суммы получившихся в результате указанного разбиения «малых» криволинейных трапеций: $S_{aABb} = S_1 + S_2 \ldots S_n$

Внутри каждого отрезка разбиения произвольным образом выберем точку. Для отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ **эту**

ξ_1

точку обозначим . Из этих точек проведем прямые параллельные оси OY **до пересечения с кривой**

$y = f(x)$.

Ординаты точек пересечения равны соответственно $f = (\xi_i)$. **Каждую малую трапецию заменим прямоугольником с основанием** Δx_i **и высотой** $h = f(\xi_i)$. **Полученную в результате указанных действий ступенчатую фигуру можно рассматривать как приближенное значение искомой площади криволинейной трапеции.**

Площади прямоугольников, составляющих ступенчатую фигуру, вычисляются соответственно по формулам:

$$S_1 = f(\xi_1)\cdot(x_1 - x_0) = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1$$

$$S_2 = f(\xi_2)\cdot(x_2 - x_1) = f(\xi_2)\cdot\Delta x_2$$

$$S_n = f(\xi_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) = f(\xi_n)\cdot\Delta x_n$$

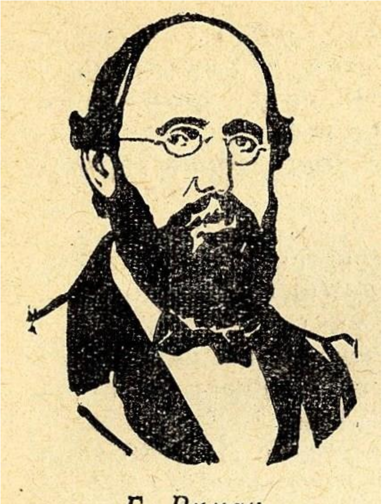
Следовательно,

$$\boxed{\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$ - площадь ступенчатой фигуры

Отметим, что σ_n тем точнее дает приближенное значение площади криволинейной трапеции, чем больше « *n* ».

$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$ - площадь криволинейной трапеции.

§2. Определенный интеграл как предел интегральной суммы (по Риману).



Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Произведем следующие действия:

1.Точками

$a = x_0;\ x_1;\ x_2 \ldots x_n = b$

разобьем отрезок $[a; b]$ на « n » частей.

2. Внутри каждого отрезка разбиения произвольным образом выбреем точки ξ_i и вычислим произведения

3. Составим интегральную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

4. Обозначим через $\max \Delta x_i$ максимальную длину отрезка разбиения.

Определение 1. Если при $\max \Delta x_i \to 0$ существует предел интегральной суммы σ_n, не зависящий ни от способа разбиения отрезка *[a; b]* на части, ни от способа выбора точек, то этот предел называется определенным интегралом функции *f (x)* по отрезку [a; b].

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}$$

- где,

a **и** ***b*** **- соответственно нижний и верхний пределы интегрирования;**

f (x) **- подынтегральная функция;**

f (x) dx - **подынтегральное выражение.**

Определенный интеграл зависит от пределов интегрирования *a, b* и от вида подынтегральной функции *f (x)* и не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,d(u)$$

С геометрической точки зрения определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции.

С физической точки зрения определенный интеграл равен работе силы, параллельной перемещению.

§3. Свойства определённого интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b A \cdot f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$

Доказательство:

$$\int_a^b A \cdot f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} A \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i =$$

$$= A \cdot \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} A \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta x_i =$$

$$= A \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$, ч.т.д.

2. Интеграл алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен соответствующей алгебраической сумме интегралов слагаемых, т.е.

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx$$

3. Если отрезок *[a; b]* разбит на два отрезка *[a; c]* и *[c; b],* то интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, то знак интеграла изменится на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

5. Если пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

6. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

7. Если $f(x) \geq \varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

8. Теорема о среднем:

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то существует точка $\xi \in [a; b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

С геометрической точки зрения теорема о среднем означает, что площадь криволинейной трапеции равновелика площади прямоугольника, основание которого совпадает с основанием трапеции *([a; b]* $\in$

OX), **а высота равна значению функции** ***f(x)*** **в некоторой точке** ξ **отрезка** ***[a; b].***

Определение 1.

Величина:

$$\boxed{M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

называется средним значением функции ***f(x)*** **на отрезке** ***[a;b].***

§4. Интервал как функция верхнего предела. Теорема Барроу.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

При этом будем полагать ***a*** **- фиксированным значением, а** ***b*****- переменным. Тогда функция верхнего предела** $У(b)$ **примет вид:**

$$У(b)=\int_a^b f(t)\,dt$$

(так как обозначение переменной интегрирования несущественно).

Желая, как обычно, пользоваться для обозначения независимой переменной буквой *x*, имеем:

$$\boxed{У(x)=\int_a^x f(t)\,dt}$$ - интеграл с переменным верхним пределом.

<u>**Теорема Барроу.**</u> **Если *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*; *b*], то производная определенного интеграла как функции его верхнего предела равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования.**

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)}$$

Из сформулированной теоремы следует, что

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

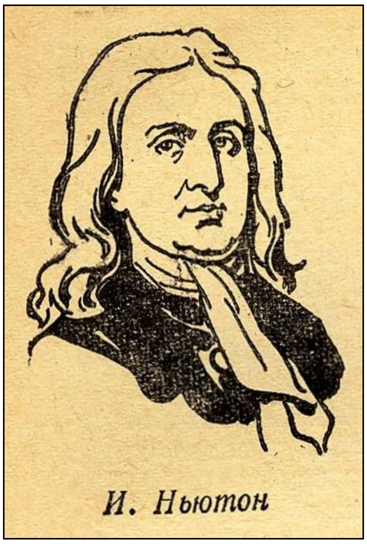
является первообразной функции *f (x)*.

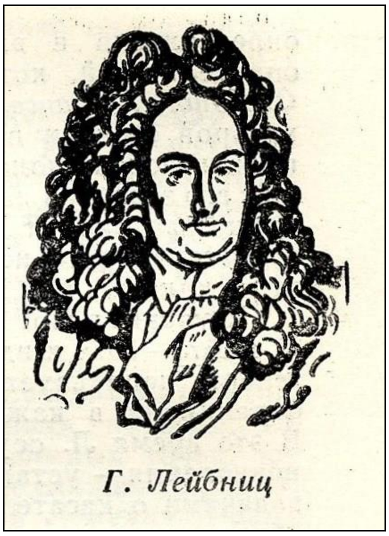
Пример:

$$\left(\int_2^x Cos^3 t\,dt\right)' = Cos^3 x;$$

$$\left(\int_3^x e^{\sqrt{y}}\,dy\right)' = e^{\sqrt{x}} \quad \text{и т.д.}$$

§5 Формула Ньютона - Лейбница.





Эта формула позволяет вычислять определенный интеграл, не прибегая к интегральным суммам. Пусть *F(x)* - не которая первообразная функции *f(x)*. Известно, что две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное число, поэтому:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Для определения величины *C* положим в последнем равенстве *x = a*, тогда

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0,$$

следовательно

$$C = -F(a).$$

Поэтому:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

и следовательно

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

В частности: при $x = b$, получим

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

или, в силу инвариантности интеграла, имеем:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$ - формула Ньютона – Лейбница.

Определение 1. **Определенный интеграл**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

равен приращению первообразной для подынтегральной функции на отрезке интегрирования [*a*;*b*], т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{0,5} =$$

$$= \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Замечания:

1. Формула Ньютона - Лейбница была выведена только для непрерывных функций.

2. Подходы к интегрированию у Ньютона и Лейбница были различные. Лейбниц развивал чистый анализ, исходя из абстрактных понятий. Ньютон рассматривал математику только как способ для физических исследований. Название этой формулы до некоторой степени условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница именно такой формулы не было. Но они независимо друг от друга установили связь между дифференцированием и интегрированием. Лейбниц ввел обозначения:

$$dx\ ;\ d^2x\ ;\ \int f(x)\,dx\ ;\ \frac{dy}{dx}.$$

§6. Способы вычисления определённого интеграла.

1. Метод подстановки в определенном интеграле:

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$, где $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$.

Перейдем к новой переменной *t*, положив

$$x = \varphi(t);\ dx = \varphi'(t)\,dt.$$

Вычислим пределы интегрирования для новой функции:

x	a	b
t	α	β

, где $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$, тогда:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt}.$$

Пример:

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 3 & 8 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}} =$$

$$= 2\int_2^3 (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= 2\left(\frac{3^2}{3} - 3\right) - 2\left(\frac{2^3}{3} - 2\right) = 2\cdot 6 - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Замечания:

Для осуществления такой замены необходимо, чтобы $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ были непрерывны на $[\alpha;\beta]$.

2. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим дифференциал произведения этих функций:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + vdu \quad (1),$$ где

$$dv = v'(x)\,dx;\ du = u'(x)$$

Проинтегрируем выражение (1) на отрезке $[a;b]$

$$\int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b u \cdot dv + \int_a^b v \cdot du$$

$$u \cdot v\Big|_a^b = \int_a^b u \cdot dv + \int_a^b v \cdot du$$

$$\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$$

Пример:

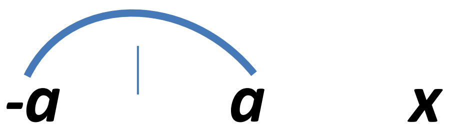
$$\int_0^\pi x\cdot\cos x\cdot dx = \begin{vmatrix} x = u \\ dx = du \\ \cos dx = dv \\ \sin x = v \end{vmatrix} = x\cdot\sin x\Big|_0^\pi -$$

$$-\int_0^\pi \sin x dx = \pi\cdot\sin\pi + \cos x\Big|_0^\pi =$$

$$= \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$$

Замечание. **В этой формуле следует помнить, что** a **и** b **– пределы изменения для независимой переменной** x**.**

3. Определённый интеграл на симметричном отрезке.



0

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx - ?$$

Используя свойства интеграла можно записать:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad (1)$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) =$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(-u)du$$

$$x = -u;\ dx = -du; \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ u & a & 0 \end{array}$$ В силу

инвариантности интеграла получим:

$$\int_{0}^{a} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

Подставим полученное значение в выражение (1):

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$ или

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int (f(-x) + f(x))dx}$$

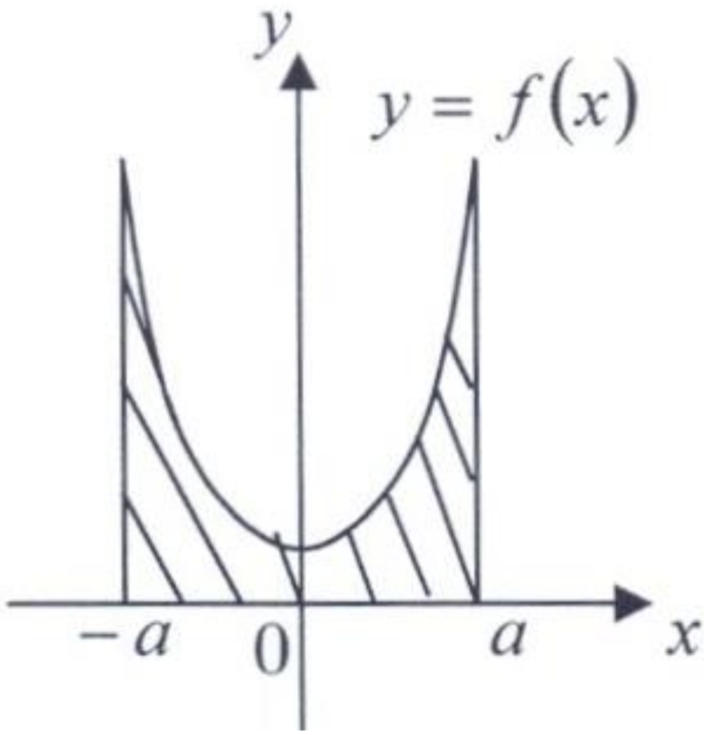
а) для четных функций:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx}$$

б) для нечетных функций:

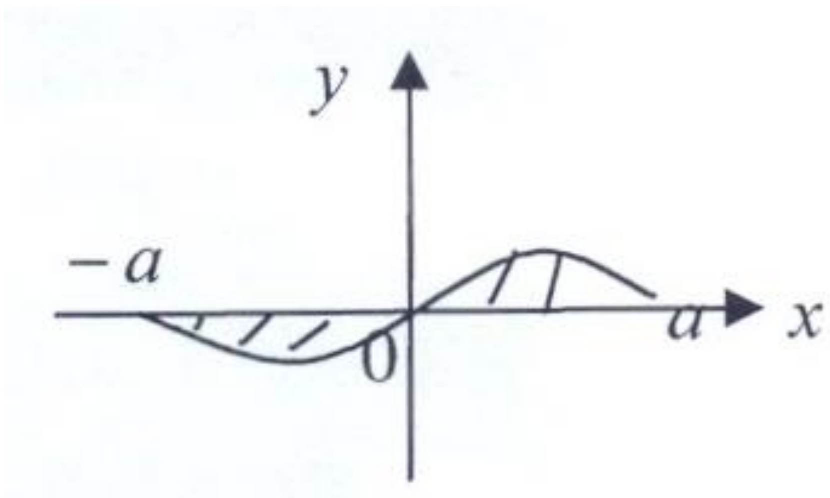
$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

С геометрической точки зрения определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции, следовательно, графически эта формула может быть изображена следующим образом:



а) четная

б) нечетная

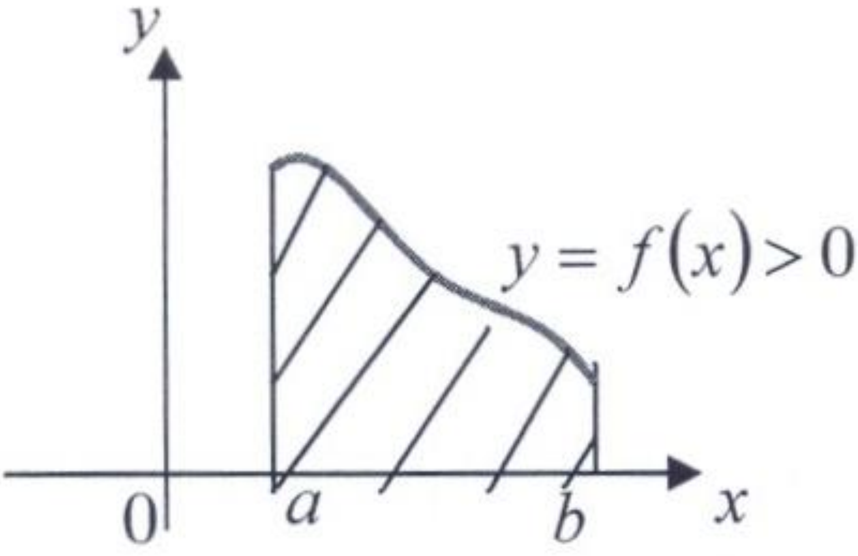


§7. Геометрические приложения определенного интеграла.

7.1. Площадь плоской фигуры.

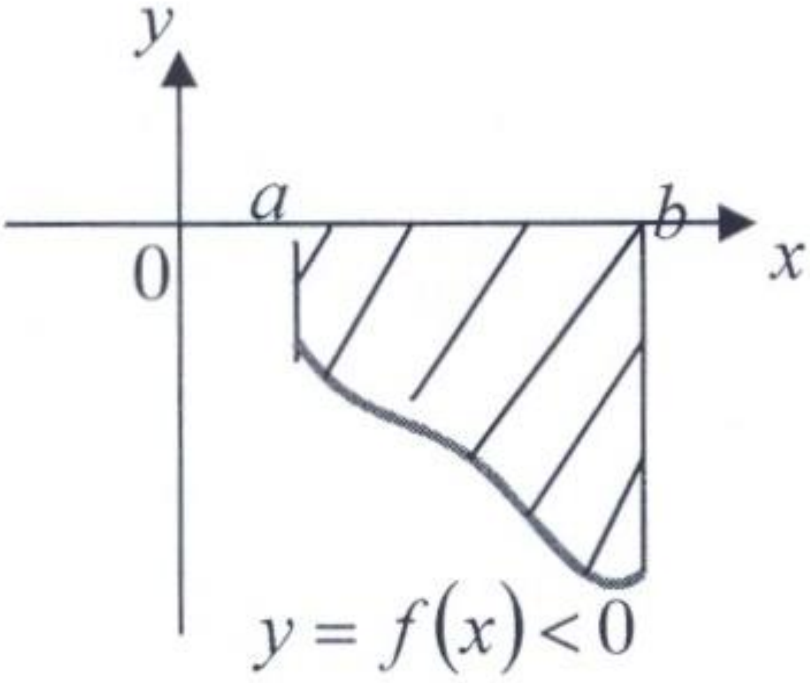
Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла (§ 1) площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = f(x)$, осью ox и b двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx$. Причем, если $f(x) \geq 0$.

а)



(1) $$\boxed{S} = \int_a^b f(x)dx = \boxed{\int_a^b y dx} \quad (f(x) \geq 0)$$

б)



$$(2) \qquad \boxed{S} = -\int_a^b f(x)dx = \boxed{-\int_a^b ydx = \int_b^a ydx} \quad (f(x) < 0)$$

В случае, если ***f(x) < 0*** **(рис. б), то в формуле (1) имеет место знак «-». В общем случае абсолютная величина выражает искомую площадь, т.е.**

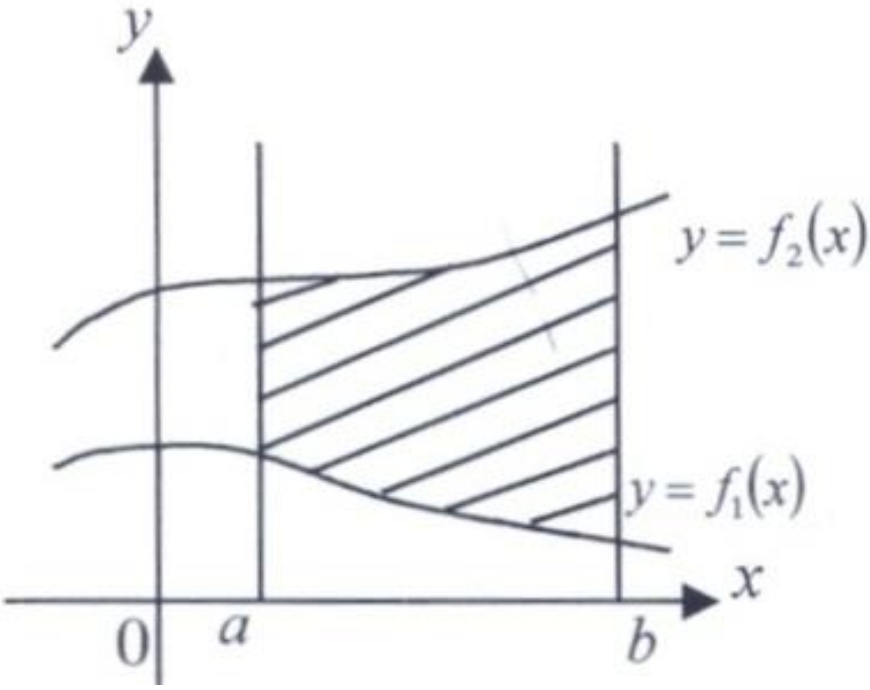
$$\boxed{S = \left| \int_a^b ydx \right|}$$

Если фигура ограничена сверху и снизу неотрицательными функциями $y_1 = f_1(x)$ **и** $y_2 = f_2(x)$ **соответственно, непрерывными на отрезке** $[a;b]$ **(рис. в), то площадь криволинейной фигуры равна разности плошадей криволинейных**

трапеций, ограниченных сверху графиками функций

$f_2(x)$ и $f_1(x)$ (при $f_1(x) > f_1(x)$)

в)

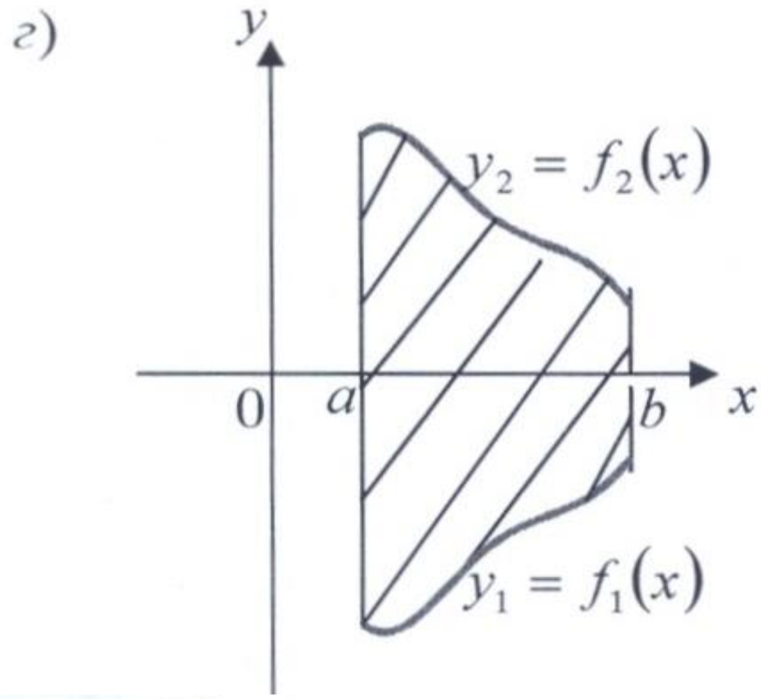


$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx =$$

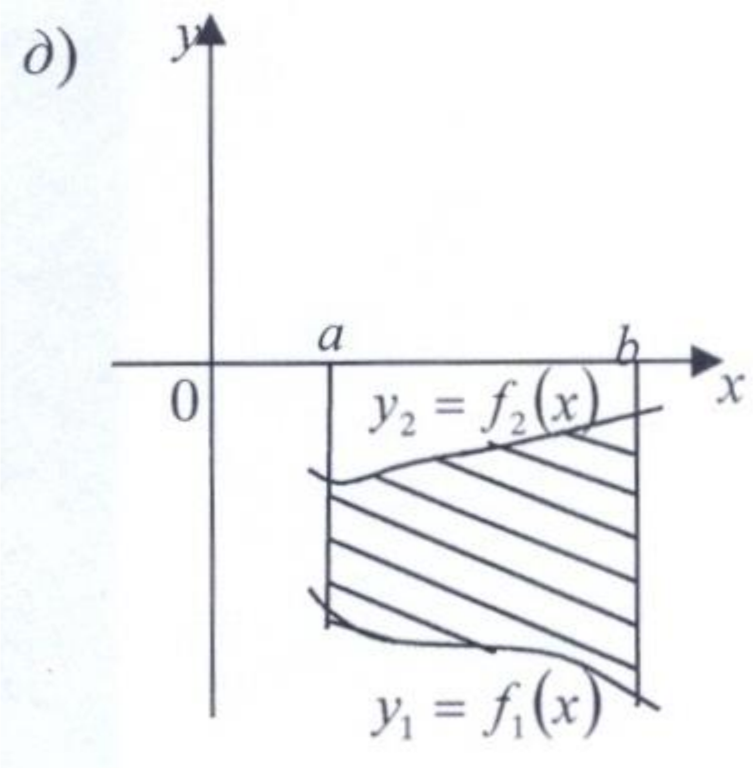
$$= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$$

$$\boxed{S = \int_a^b (y_2 - y_1)dx} \qquad (3)$$

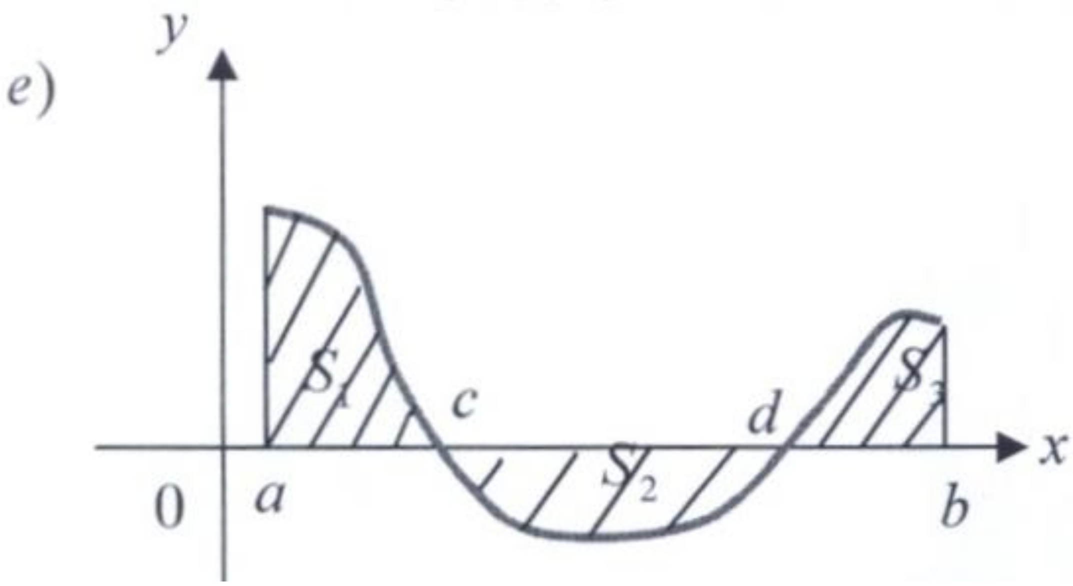
Формула (3) справедлива при любом расположении кривых $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (рис. г, д), при условии что, $f_2(x) > f_1(x)$:



$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$$



Если график функции $y = f(x)$ **на интервале** $[a;b]$ **несколько раз пересекает ось** OX **(рис. е), то необходимо вычислить площади фигур, расположенных выше и ниже оси** OX **и сложить их.**



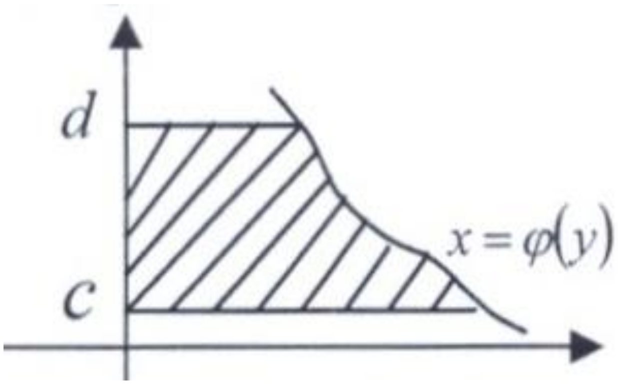
$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_1 = \int_a^c f(x)dx \quad S_2 = -\int_c^d f(x)dx \quad S_3 = \int_d^c f(x)dx$$

$$\boxed{S = \int_a^c ydx - \int_c^d ydx + \int_d^b ydx} \qquad (4)$$

Аналогично можно рассмотреть шесть случаев вычисления площади криволинейной трапеции, прилежащей к оси *ОУ*.

Например:



$$\boxed{S} = \int_c^d \varphi(y)dy = \boxed{\int_c^d xdy}$$

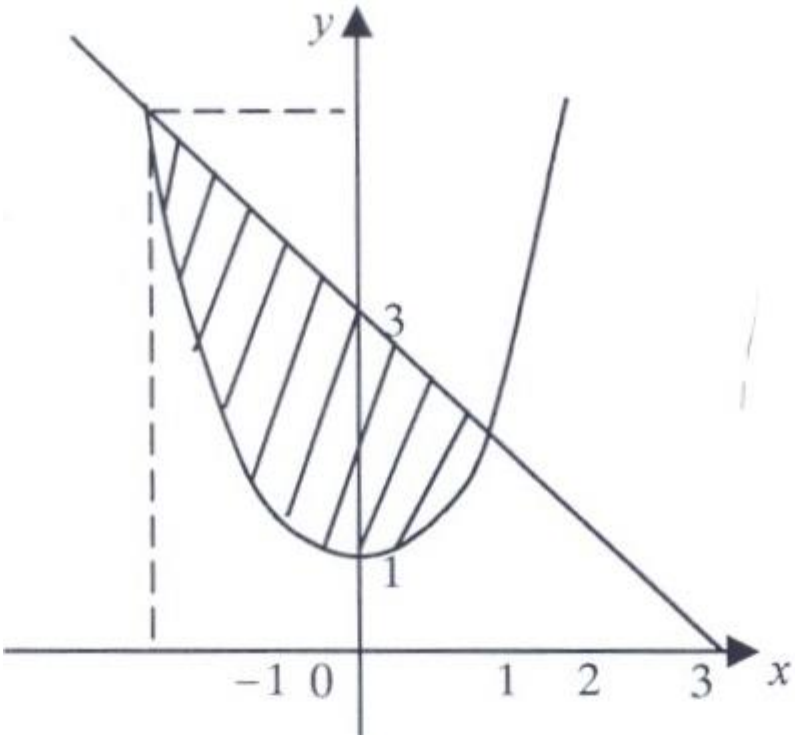
Пример 1: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$.

Решение: 1) Построим линии и обозначим криволинейную трапецию:

$y = x^2 + 1$ - парабола, смещенная по оси *ОУ* на единицу вверх. Найдем координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 0 \ ; \ y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 1 \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & \pm 1 & \pm 2 \\ \hline y & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

$y = -x + 3$ - прямая $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$.



2) **Найдем точки пересечения линий (левую и правую границу криволинейной трапеции):**

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 1 = -x + 3 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1 \qquad y_1 = 2 \qquad A(1;2)$$

$$x_2 = -2 \qquad y_2 = 5 \qquad B(-2;5)$$

3) Вычислим площадь:

$S = \int\limits_a^b (y_2 - y_1)\,dx$, где

$y_2 = -x + 3$; $y_1 = x^2 + 1$; $a = -2$; $b = 1$

$$S = \int\limits_{-2}^{1} \left((-x+3) - (x^2+1) \right) dx = \int\limits_{-2}^{1} \left(-x + 3 - x^2 - 1 \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(-x - x^2 + 2 \right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{\overset{3}{1}}{2} - \frac{\overset{2}{1}}{3} + \overset{6}{2} \right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} + 2(-2) \right) =$$

$$=\frac{7}{6}-\left(-2+\frac{8}{3}-4\right)=\frac{7}{6}+\overset{6}{6}-\frac{\overset{2}{8}}{3}=$$

$$=\frac{7+36-16}{6}=\frac{27}{6}=4\frac{1}{2}\,(\text{кв.ед.})$$

Пример 2: **Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y = '\j x и y = x .**

Решение:

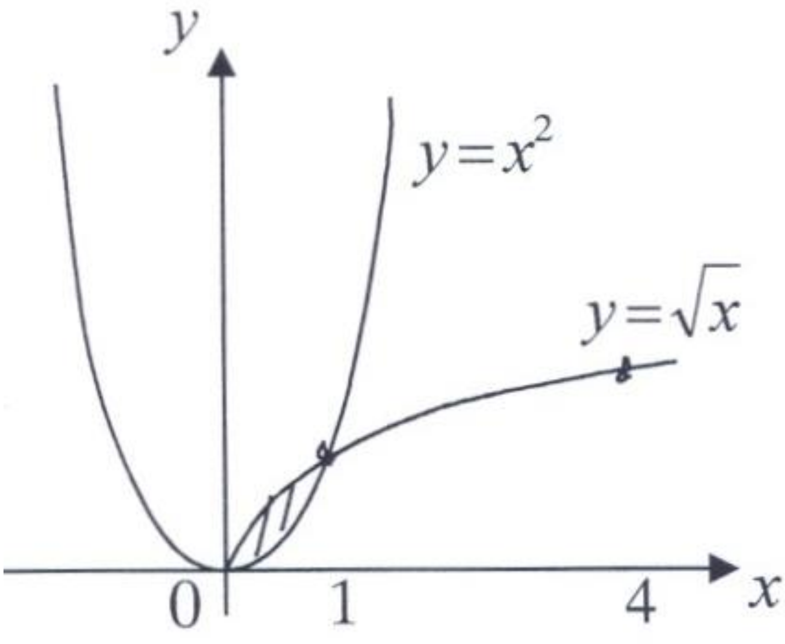
1) Построим линии:

- $y=\sqrt{x}$ - полупарабола

x	0	4	1
y	0	2	1

- $y=x^2$ - парабола

x	0	±1	±2
y	0	1	4



2) Найдем точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \qquad \sqrt{x} = x^2 \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

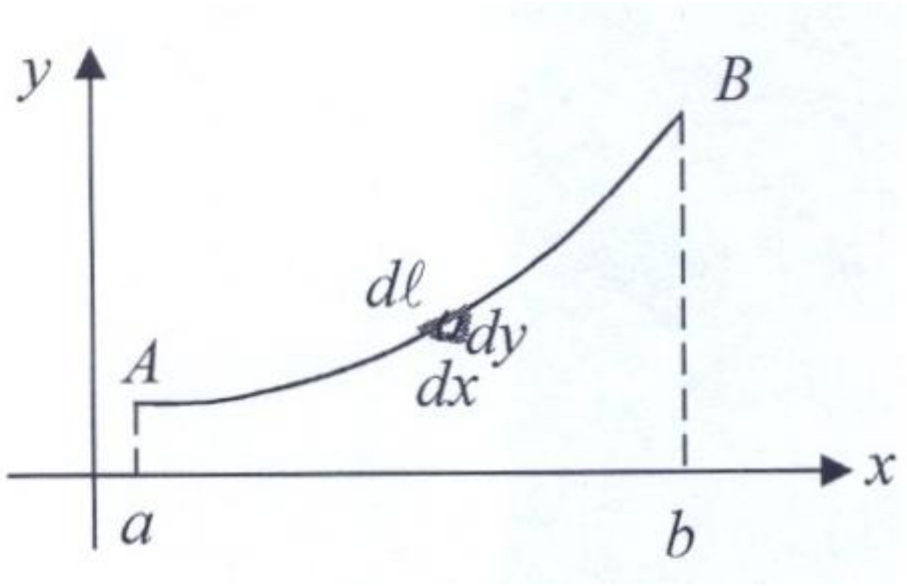
3)Вычислим площадь:

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=$$

$$=\left.\left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\,(\text{кв.ед.})$$

7.2. Длина дуги плоской кривой.

Пусть незамкнутая кривая АВ на плоскости ха у задана уравнением *y = f (x)*, где *f(x)* - функция с непрерывной производной на отрезке [*a;b*].



Выделим из нашей дуги элементарный отрезок $d\ell$. Применяя к заштрихованному треугольнику (в силу гладкости кривой этот отрезок можно принять за прямоугольный) теорему Пифагора, находим

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

но $dy = y'dx$, значит

$$\boxed{d\ell = \sqrt{1+(y')^2}\,dx}.$$

Тогда, длина дуги AB определяется формулой:

$$L_{AB} = \int_a^b d\ell = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}.$$

Если же плоская кривая задана уравнением

$x = \varphi(y)$, то используются формулы:

$$d\ell = \sqrt{1+(x')^2}\,dy \quad \text{и} \quad \boxed{L_{CD} = \int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy}$$

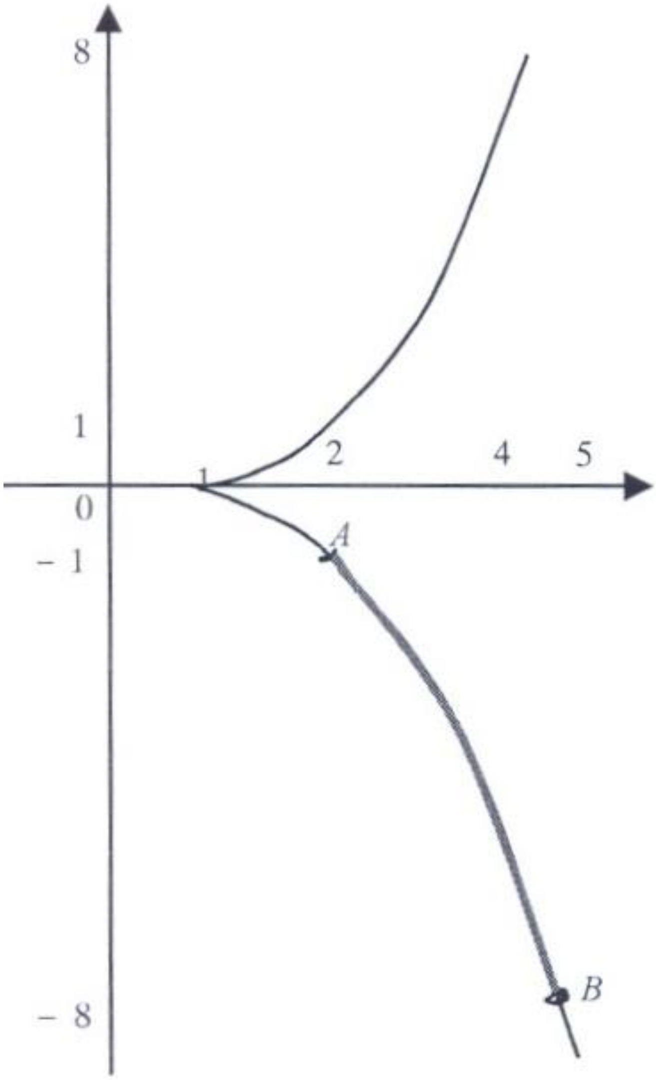
Пример: **Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x-1)^3$ между точками *A(2; -1)* и *B(5; -8)*.**

Решение:

1) Построим кривую:

$$y^2 = (x-1)^3 \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{(x-1)^3}$$

x	1	2	5
y	0	±1	±8



2) Найдем производную данной функции:

$$y' = \pm\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

Подставим в формулу $L_{AB} = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ и получим:

$$L_{AB} = \int\limits_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx = \int\limits_2^5 \sqrt{\frac{4+9x-9}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\left.\frac{(9x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_2^5=\left.\frac{\sqrt{(9x-5)^3}}{27}\right|_2^5=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\sqrt{(9\cdot 5-5)^3}-\sqrt{(9\cdot 2-5)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{27}\left(80\sqrt{10}-13\sqrt{13}\right)\approx 7,63$$

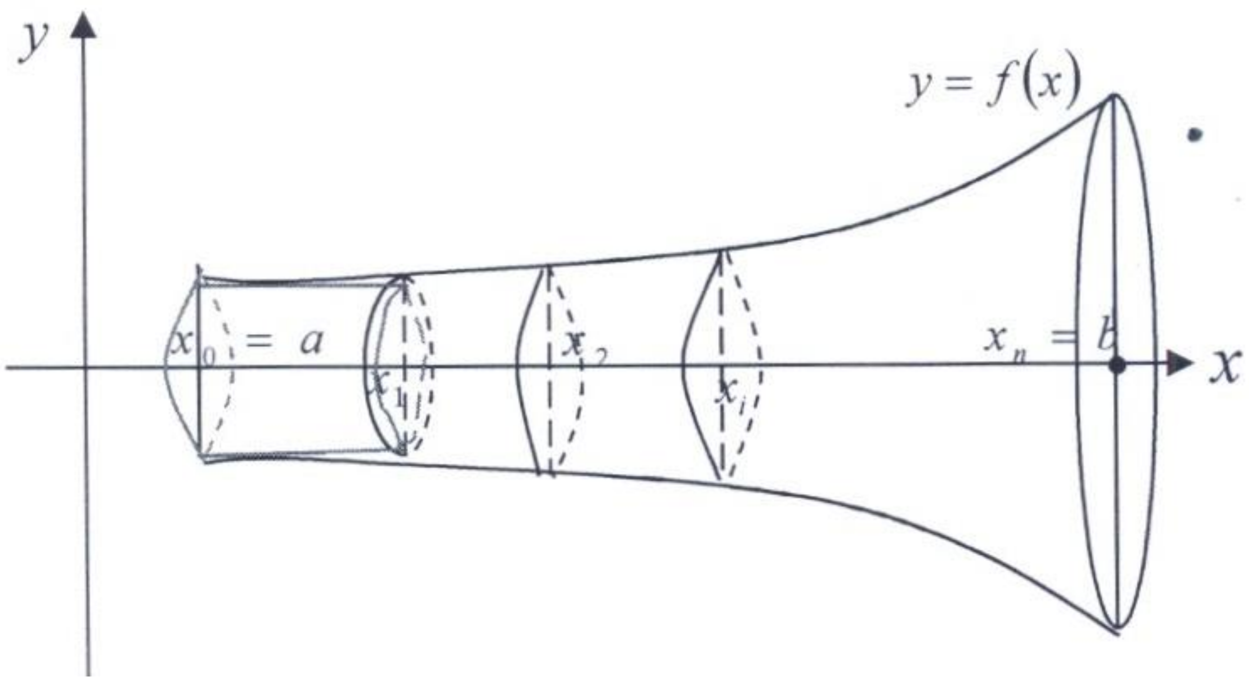
7.3. Объем тела вращения.

Пусть на отрезке $[a;\ b]$ задана непрерывная знакопостоянная функция $y=f(x)$. Найдем объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$y=f(x);\ y=o;\ x=a;\ x=b.$

Пусть известна площадь любого сечения этого тела (вращения) плоскостями, перпендикулярными оси

OX. **Разобьем тело на слои, перпендикулярные OX и проходящие через точки** $x_1; x_2; \dots x_{n-1}$



Заменим каждый слой прямым цилиндром с высотой

$(x_i - x_{i-1})$ **и площадью основания** $S(x_i)$. **Тогда объем каждого элементарного цилиндра будет равен**

$$V_i = S(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = S(x_i) \cdot \Delta x_i .$$

Объем каждого элементарного слоя будет приближенно равен объему соответствующего цилиндра, но отбрасываемая величина бесконечно малая более высокого порядка малости. Тогда

объем всего тела будет равен сумме объемов всех слоев:

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i \approx \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \cdot \Delta x_i$$

И тем точнее будет вычислен объем, чем больше число точек разбиения «x_i», т.е. чем больше «n».

Переходя к пределу, получим точное равенство:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \cdot \Delta x_i$$

а предел такой суммы и является определенным интегралом, т.е.

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

(1)

Зная, что $S(x)$ - площадь основания цилиндра и равна $S(x) = \pi r^2$, а радиус $r = y$, имеем $S(x) =$.

Тогда формула (1) примет вид:

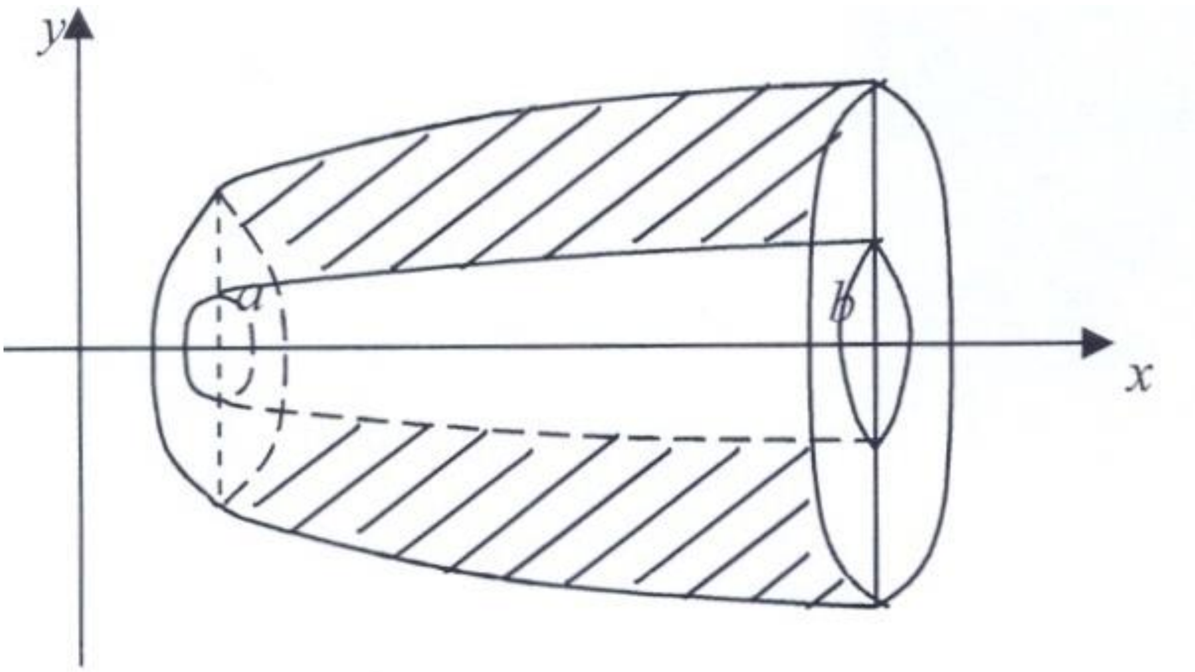
$$\boxed{V_{m.в.} = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx}$$ - вокруг оси OX.

Аналогично можно вращать трапецию вокруг оси $OУ$, если функция задана как $x = \varphi(y)$. Тогда:

$$\boxed{V_{m.в.} = \pi \int_c^d x^2 dy}$$ - вокруг оси OY.

Замечание. Если на отрезке $[a;b]$ криволинейная трапеция опирается не на ось OX, а ограничена двумя функциями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2(x)$, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$, то имеем:

$$\boxed{V_{т.в.} = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx}.$$



Пример 1:

Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями:

y = 2x - x^2 **и** ***y = 0*****. Определить, какова масса продукта, заполняющего этот объем, если** $1m^3$ **весит 0,4 тонны?**

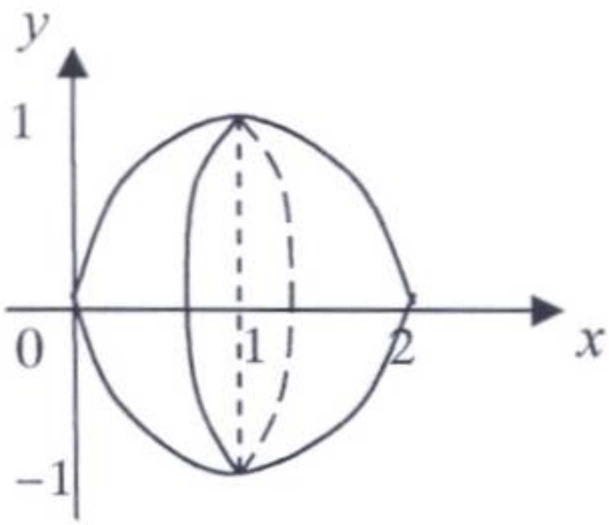
Решение.

1) Построим линии:

- $y = 2x - x^2$ - парабола

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1; \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} =$$

$$= -\frac{4-0}{-4} = 1; \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & 0 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & 0 \end{array}$$



2) Найдем объем тела вращения:

$$V_{т.в.} = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 2^3 - 2^4 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right) = \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) =$$

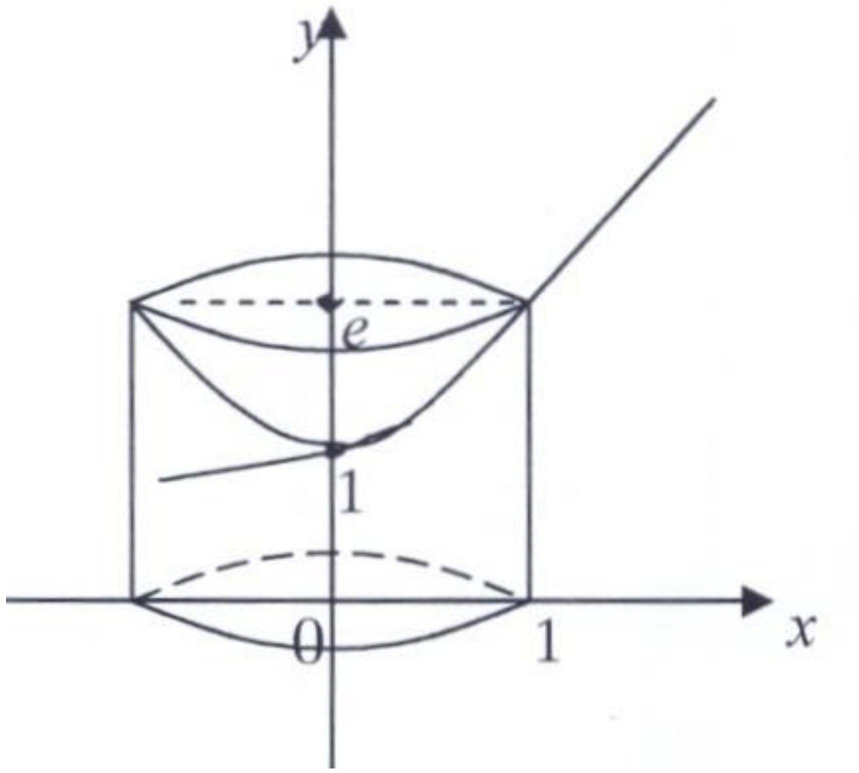
$$= \pi \left(\frac{160 - 240 + 96}{15} \right) = \frac{16\pi}{15} \left(м^3 \right)$$

3). $m = \dfrac{16\pi}{15} \cdot 0,4 \approx 1,34 т$.

Пример 2:

Найти объем тела вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной следующими линиями: $y = e^x$; $x = 0$;

$x = 1$; $y = o$.



Выражаем x через y: $x = \ln y$. Промежуток интегрирования $[1; e]$ определяется очевидным образом.

Объем тела вращения равен разности объемов соответственно цилиндра с радиусом $r = 1$ и высотой $h = e$ и тела вращения вокруг OY

криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой *x = ln y*.

$$V = V_1 - V_2 = \pi e - \pi \int_1^e \ln^2 y \cdot dy =$$

$$= \pi e - \pi y \cdot \ln^2 y \Big|_1^e + \pi \int_1^e y \cdot \frac{1}{y} \cdot 2 \ln y dy =$$

$$\left.\begin{matrix} \ln^2 y = u \\ 2\ln y \cdot \frac{1}{y} dy = du \\ dy = dv \\ y = v \end{matrix}\right| \begin{matrix} \ln y = u \\ \frac{1}{y} dy = du \\ dy = dv \\ y = v \end{matrix} \Bigg|$$

$$= \pi \cdot e - \pi \left(e \cdot \ln^2 e - 1 \cdot \ln^2 1 \right) + 2\pi \cdot y \ln y \Big|_1^e - 2\pi \int_1^e dy =$$

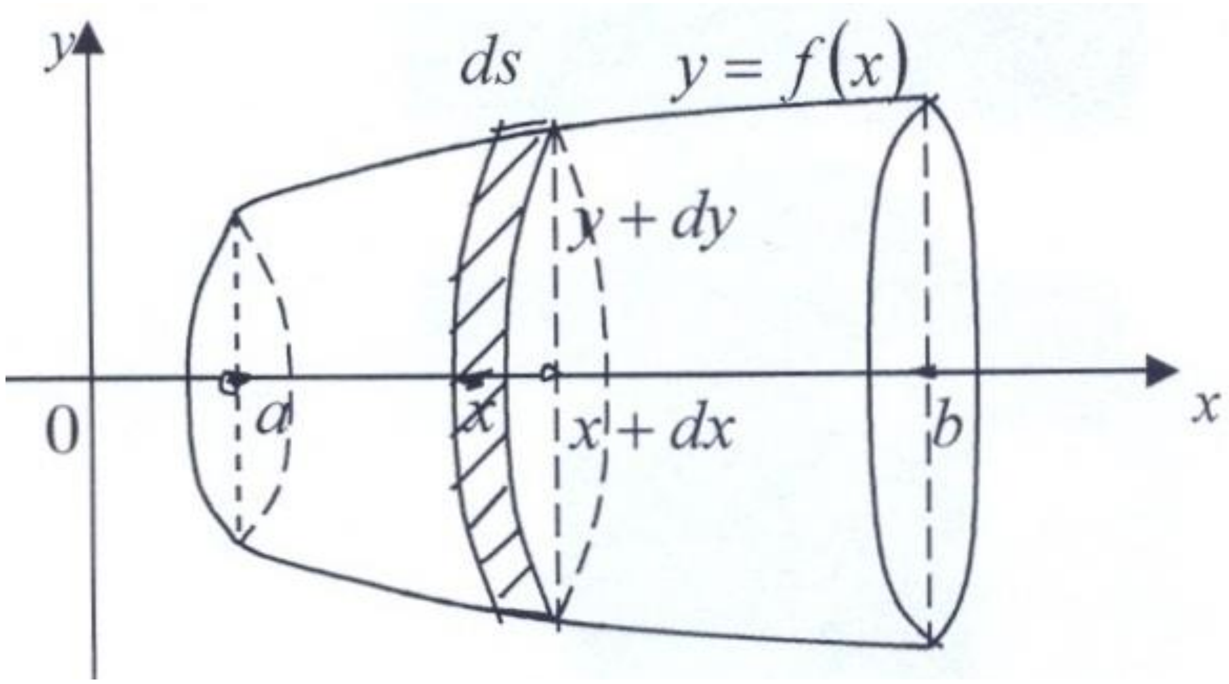
$$= 2\pi \left(e \cdot \ln e - 1 \ln 1 \right) - 2\pi y \Big|_1^e = 2\pi e - 2\pi e +$$

$$+ \frac{1}{2}\pi = 2\pi \left(куб.ед. \right)$$

7.4. Площадь поверхности вращения.

Пусть дуга плоской кривой $y = f(x) > 0$ **при**

$x \in [a;b]$ **вращается вокруг оси** OX.



Найдем площадь получаемой при этом поверхности вращения. Для этого выделим из нашей дуги элемент ds, **соответствующий изменению абсциссы от** x **до**

$x + dx$.

Если принять этот элемент за прямолинейный, то описанная им часть поверхности окажется усеченным конусом, у которого ds служит образующей. Радиусы оснований этого конуса будут *y* и *y + dy* .

Из школьного курса мы знаем, что площадь боковой поверхности усеченного конуса с образующей ℓ и радиусами оснований *r* и *R* равна *S* = π *(r + R)*$\cdot\ell$. Воспользуемся этой формулой и получим:

$$\pi\left(y+\left(y+dy\right)\right)dx = 2\pi ds + \pi dyds\ .$$

Имеем:

$$dL = 2\pi yds\text{, но } ds = \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx\ .$$

Тогда площадь поверхности вращения равна:

$$\boxed{L = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\, dx}$$, где

$$y = f(x) \qquad y'_x = f'(x)$$

Если дуга вращается вокруг оси OY, то

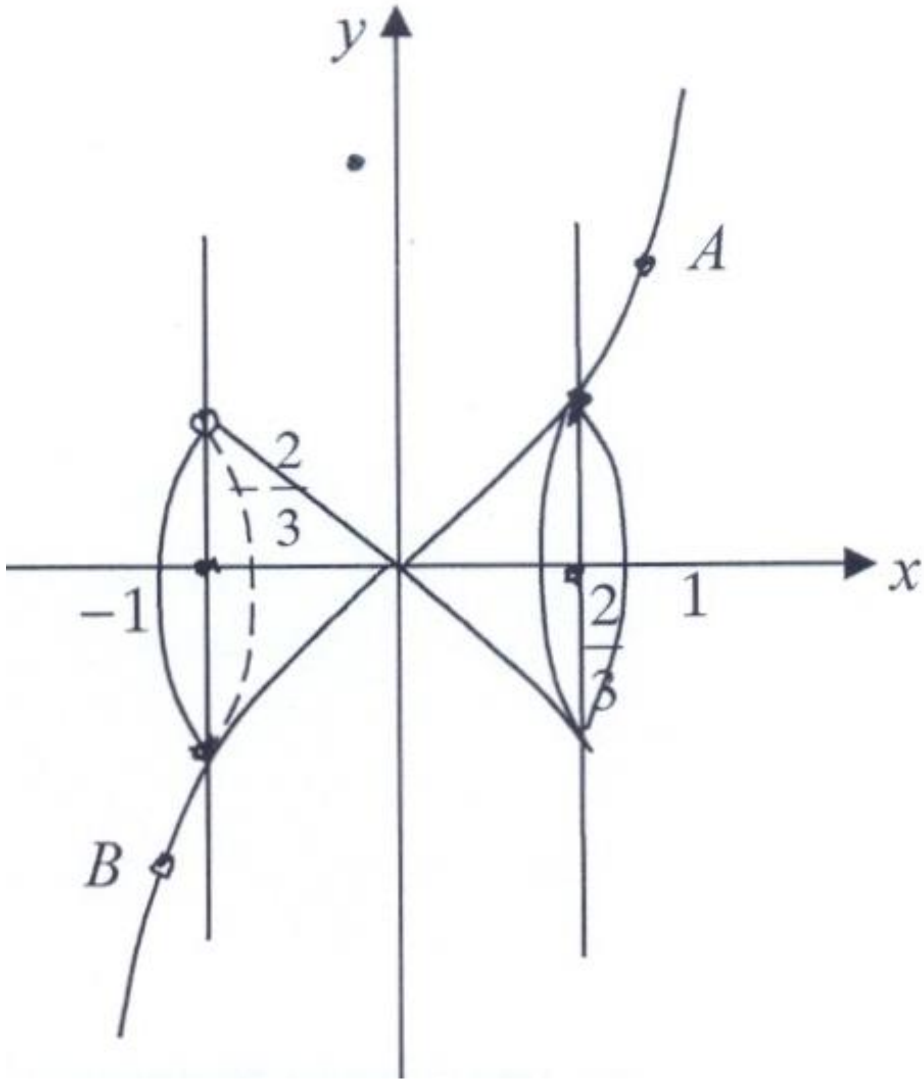
$$\boxed{L = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2}\, dy}$$, где $x = \varphi(y)$

$x'_y = \varphi'(y)$.

Пример: Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кубической параболы $y = x^3$, заключенной между прямыми

$$x = -\frac{2}{3} \text{ и } x = \frac{2}{3}$$

Решение. 1) Построим параболу и прямые:



2) Найдем точки пересечения линий:

$$x=\frac{2}{3};\ y=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\qquad A\left(\frac{2}{3};\frac{8}{27}\right)$$

$$x=-\frac{2}{3};\ y=\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{8}{27}\qquad B\left(-\frac{2}{3};-\frac{8}{27}\right)$$

3) Данная поверхность вращения состоит из двух равных частей,

$$L=2\cdot 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx=$$

поэтому

$$=4\pi\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx=4\pi\int_1^{\frac{25}{9}}\frac{1}{36}\sqrt{t}\,dt=$$

$$\left.\begin{array}{c} 1+9x^4=t \\ 36x^3dx=dt \\ x^3dx=\dfrac{1}{36}dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2/3 \\ \hline t & 1 & 25/9 \end{array} \end{array}\right|:$$

$$= \frac{\pi}{9}\int_{1}^{\frac{25}{9}} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{\pi}{9}\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{1}^{25/9} = \frac{2\pi}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{25}{9}\right)^{3}} - \sqrt{1^{3}}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{27}\left(\frac{125}{27} - 1\right) = \frac{2\pi}{27}\cdot\frac{98}{27} \approx 0,27\pi \approx 0,845$$

§8. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Формула Ньютона - Лейбница сводит вычисление определенного интеграла от какой-либо функции к нахождению ее первообразной. Значит, если эта первообразная не элементарна, то надо вычислять определенный интеграл как-то иначе при помощи той или иной приближенной формулы.

Если функция $y=f(x)$ задана формулой или таблицей, то приближенное значение определенного интеграла

$\int_a^b f(x)dx$ можно найти следующим путем:

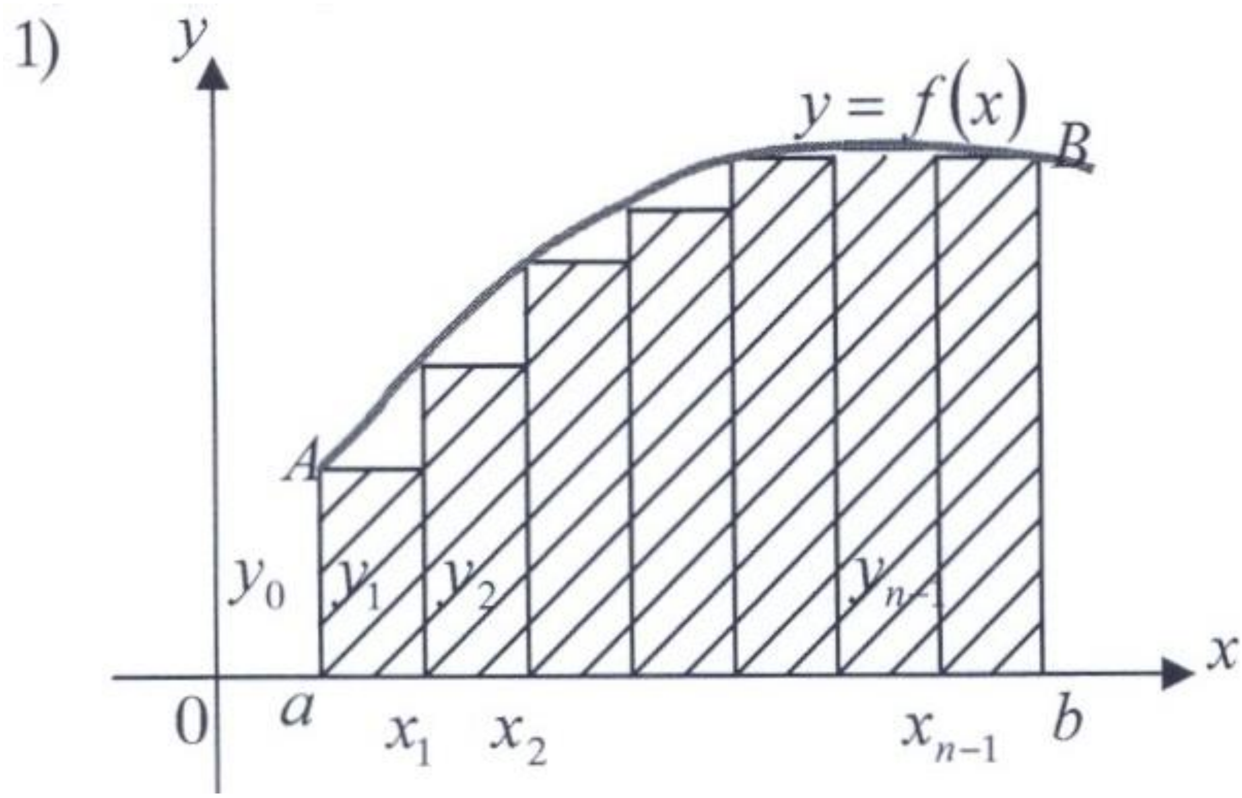
1) Разделить интервал интегрирования [*a; b*] точками $x_1; x_2; x_3 \ldots x_{n-1}$ **на** n **равных частей, т.е.** $h = \frac{b-a}{n}$, **где** h **- шаг.**

2) Вычислить значения подынтегральной функции $y = f(x)$ **в точках деления:** $y_0 = f(a)$; $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2) \ldots y_{n-1} = f(x_{n-1})$; $y_n = f(b)$.

3) Воспользоваться одной из приближенных формул.

Наиболее употребительны следующие приближенные формулы, основанные на геометрическом представлении определенного интеграла в виде площади криволинейной трапеции.

8.1. Формула прямоугольников.



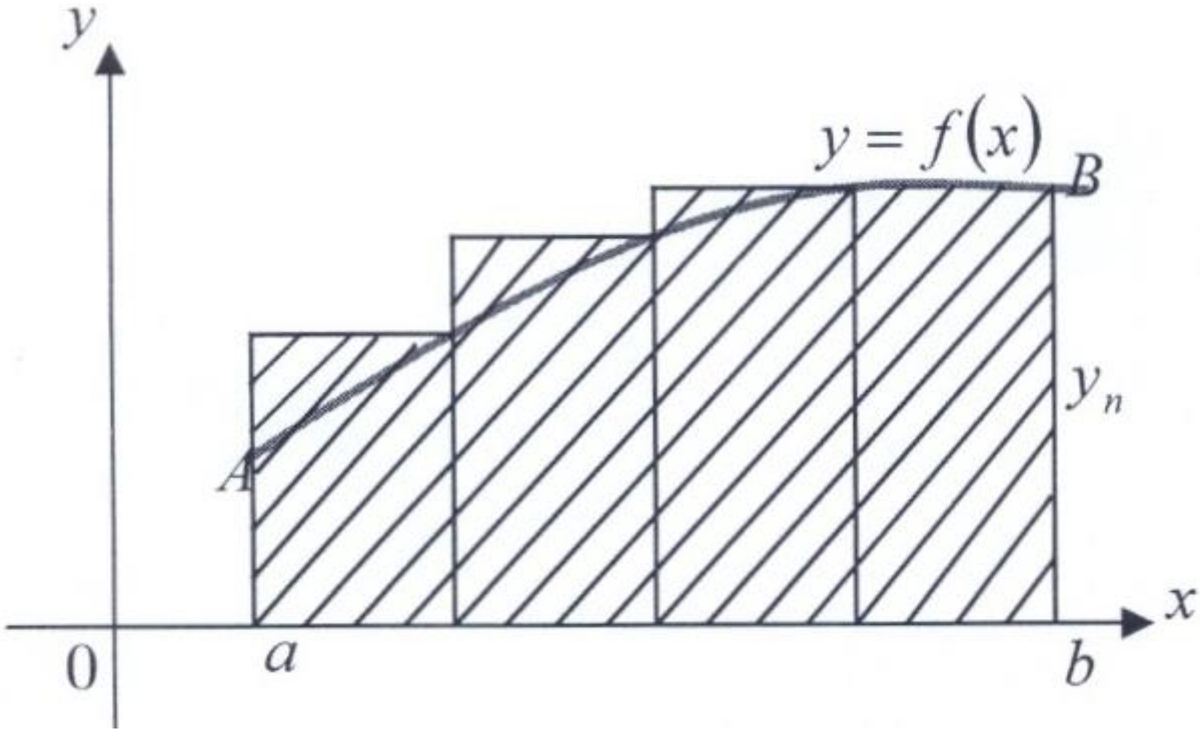
Геометрически по этой формуле площадь криволинейной трапеции *aABb*, которая соответствует интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, заменяется

суммой площадей заштрихованных прямоугольников:

$$\int_a^b y dx \approx h\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

$$\boxed{\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i} \qquad (1)$$

2)



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n\right) = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\boxed{\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i} \qquad (2)$$

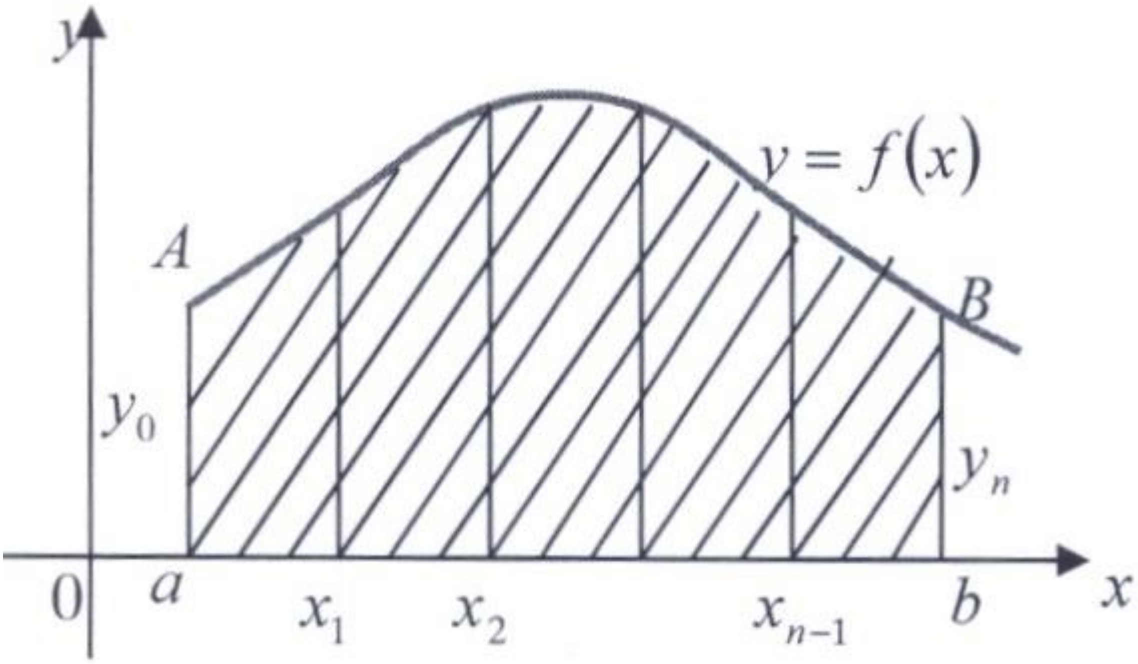
Погрешность формулы прямоугольников:

$$\boxed{S_{(n)} \le \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot y'_{МБ}},$$ где

$y'_{МБ}$ - наибольшее значение $|y'|$ в интервале $[a;b]$.

8.2. Формула трапеций.

Геометрически по этой формуле площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей заштрихованных трапеций.



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$ или

$$\boxed{\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)}.$$

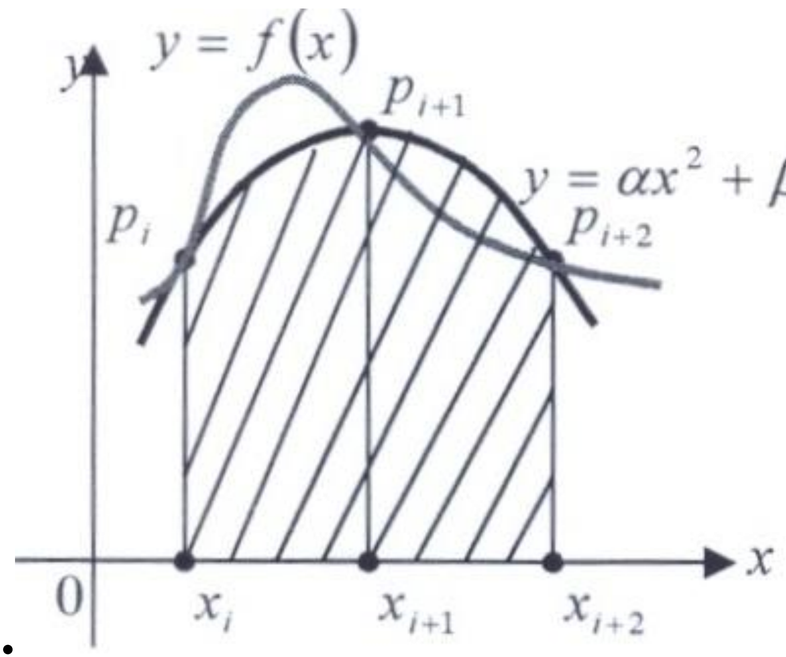
Погрешность формулы трапеций:

$$\boxed{S_{(n)} \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot y''_{НБ}}$$, где

$y''_{НБ}$ - наибольшее значение $|y''|$ в интервале $[a;b]$.

8.3. Формула Симпсона (параболических трапеций).

***n*- число четное.**



.

Геометрически по этой формуле площадь каждой пары вертикальных полосок $x_i p_i p_{i+2} x_{i+2}$ заменяется площадью одноименной параболической трапеции, получаемой при замене соответствующего участка кривой $y = f(x)$ дугой параболы $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (с вертикальной осью), проходящей через три точки кривой с абсциссами x_i, $x_{i+1} = x_i + h$ и

$x_{i+2} = x_i + 2h.$

$$\boxed{\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left(y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right)\right)}.$$

Погрешность формулы Симпсона:

$$\boxed{S_{(n)} \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot y^{(IV)}{}_{НБ}}, \text{ где}$$

$y^{(IV)}{}_{НБ}$ - наибольшее значение $\left|y^{(IV)}\right|$ в интервале $[a;b]$.

Все указанные формулы будут тем точнее, чем больше взято n., т.е. при достаточно большом значении n посредством каждой из этих формул можно вычислить приближенное значение определенного интеграла с любой желаемой точностью.

При одном и том же значении n обычно вторая формула точнее первой, а третья точнее второй.

Пример: Вычислить интеграл:

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = I:$$

а) по формуле Ньютона - Лейбница;

б) по формуле прямоугольников;

в) по формуле трапеций;

г) по формуле Симпсона, разбивая интервал интегрирования на 8 равных частей.

Оценить в процентах погрешность результатов, полученных по приближенным формулам.

Решение: а)

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6_3}\cdot\frac{2\sqrt{(6x-5)^3}}{3}\Bigg|_1^9 = \frac{\sqrt{(6x-5)^3}}{9}\Bigg|_1^9 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\sqrt{(6\cdot 9-5)^3} - \sqrt{(6\cdot 1-5)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(7^3 - 1\right) = \frac{1}{9}\cdot 342 = 38$$

Делим интервал интегрирования [1; 9] на 8 равных частей:. Определим точки деления x_i и значения y_i подынтегральной функции $y = \sqrt{6x - 5}$ в этих точках:

$x_0 = 1$ $\quad y_0 = \sqrt{6-5} = 1,0000$

$x_1 = 2$ $\quad y_1 = \sqrt{6 \cdot 2 - 5} = \sqrt{7} = 2,6458$

$x_2 = 3$ $\quad y_2 = \sqrt{13} = 3,6056$

$x_3 = 4$ $\quad y_3 = \sqrt{19} = 4,3589$

$x_4 = 5$ $\quad y_4 = \sqrt{25} = 5,0000$

$x_5 = 6$ $\quad y_5 = \sqrt{31} = 5,5678$

$x_6 = 7$ $\quad y_6 = \sqrt{37} = 6,0828$

$x_7 = 8$ $\quad y_7 = \sqrt{43} = 6,5574$

$x_8 = 9$ $\quad y_8 = \sqrt{49} = 7,0000$

б) по формуле прямоугольников:

$$I \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \cdot (2{,}6458 + 3{,}6056 + 4{,}3589 +$$

$$+ 5{,}0 + 5/5678 + 6{,}0828 + 6{,}5574 + 7{,}0) =$$

$$= 40{,}8183$$

Абсолютная ошибка (по избытку) равна

40,8183 - 38 = 2,8183, а относительная

2,8183 ·100 ~ 7 42%.

в) по формуле трапеций:

$$I \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 1\left(\frac{1+7}{2} + 33{,}8183\right) =$$

$$= 4 + 33{,}8183 = 37{,}8183$$

Абсолютная ошибка (по недостатку) составляет

38 - 37,8183 = 0.1817, а относительная

$$\frac{0{,}1817 \cdot 100}{38} \sim 0{,}48\%.$$

г) по формуле Симпсона:

$$I \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_8 + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 7 + 4 \cdot 19{,}1299 + 2 \cdot 14{,}6884\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(8 + 76{,}5196 + 29{,}3768\right) = \frac{1}{3} \cdot 113{,}8964 = 37{,}9655$$

Абсолютная ошибка составляет 38-37,9655=0,0345,

а относительная $\frac{0{,}0345 \cdot 100}{38} =\approx 0{,}09\%$

§9. Приложения определённого интеграла в экономике.

Экономический смысл определенного интеграла заключается в выражении объема произведенной продукции при известной функции производительности труда.

Однако в экономических задачах переменные меняются дискретно. Для использования определенного интеграла нужно составить некоторую идеализированную модель, предполагающую непрерывное изменение зависимых переменных (функций) и независимых переменных (аргумента). Рассмотрим соответствующие примеры:

1) Если в функции Кобба - Дугласа ($z = b_0 x_1^{b1} \cdot x_2^{b2}$, где z - величина общественного продукта; x_1 - затраты труда; x_2 - объем производственных фондов) считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $z(t) = (\alpha t + \beta) \cdot e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$\boxed{Q = \int_0^T (\alpha t + \beta) \cdot e^{\gamma t}\, dt} \qquad (1)$$

Пример: Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба - Дугласа имеет вид

z (t) = (1 + t) $\cdot\, e^{3t}$**. По формуле (1) имеем:**

$$Q = \int_0^4 (1 + t4) \cdot e^{3t}\, dt = \frac{1}{3} e^{3t} (1 + t)\Big|_0^4 - \frac{1}{3} \int_0^4 e^{3t}\, dt =$$

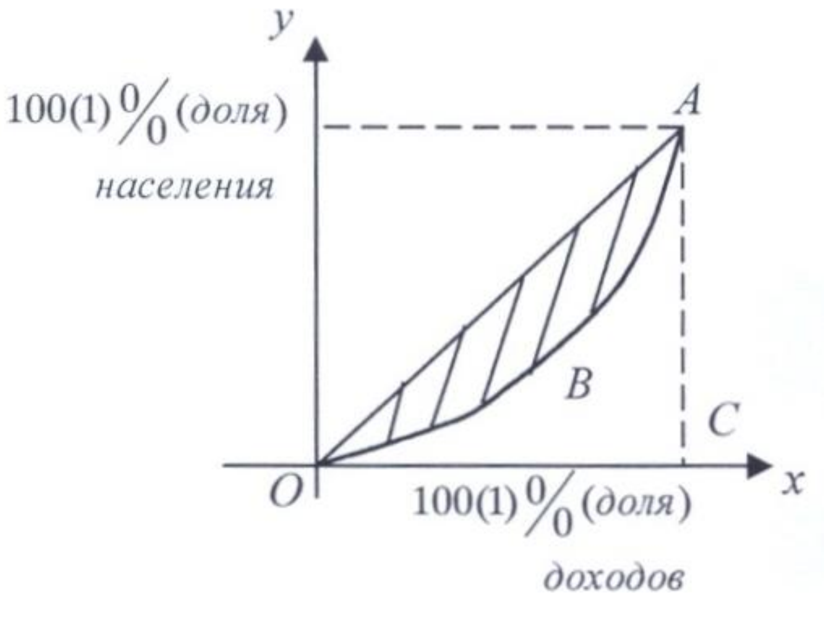
$$= \frac{1}{3}\left(e^{12} (1 + 4) - e^{0} (1 + 0)\right) - \frac{1}{9} e^{3t} \Big|_0^4 =$$

$$\left.\begin{aligned} 1+t &= u \\ dt &= du \\ e^{3t}dt &= dv \\ \frac{1}{3}e^{3t} &= v \end{aligned}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\left(5e^{12}-1\right)-\frac{1}{9}\left(e^{12}-1\right)=\frac{5}{3}e^{12}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}e^{12}+\frac{1}{9}=\frac{14}{9}e^{12}-\frac{2}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}\left(14e^{12}-2\right)\approx 2{,}53\cdot 10^{5}\ (\textit{усл.ед.})$$

2) Для анализа социально - экономического строения общества используется так называемая «кривая Джинни» (или «кривая Лоренца») распределения богатства в обществе.



Данная функция исследует зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривая OBA). При помощи кривой Джинни мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения: при равномерном распределении доходов кривая Джинни выражается в прямую - биссектрису OA, поэтому площадь фигуры OAB между биссектрисой OA и кривой Джинни, отнесенная к площади треугольника OAC (коэффициент Джинни), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

Пример: По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Джинни OBA может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, где x - доля населения, y - доля доходов населения.

Вычислить коэффициент Джинни.

Решение:

$$k=\frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}=\frac{S_{\Delta OAC}-S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}}=1-\frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}};$$

$$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}OC\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$S_{OBAC}=\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=x\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array}\end{matrix}\right|=$$

$$=1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt=1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t dt=1-\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{4}\cdot(\sin\pi-\sin 0)=1-\frac{\pi}{4}$$

$$k=1-\frac{1-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}}=1-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=1-2+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}57$$

Достаточно высокое значение *k* показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

3) Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время *t* (лет) при годовом проценте (процентной ставке) *p*, называется дисконтированием. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть k_t - конечная сумма, полученная за *t* лет, и

***k* - дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также современной суммой. Если проценты простые, то $k_t = k\,(1 + it)$, где $i = p/100$ - удельная процентная ставка.**

Тогда $\boxed{k = \dfrac{k_t}{(1+it)}}$ (1)

Если про центы сложные, то $k_t = k\ (1 + it\ t$,

тогда

$$\boxed{k = \frac{k_t}{(1+it)^t}} \qquad (2)$$

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией *f (t)* и при удельной норме процента, равной *i*, процент начисляется непрерывно. Тогда, дисконтированный доход *k* за время *T* вычисляется по формуле:

$$\boxed{k = \int_0^T f(t) \cdot e^{-it} dt} \qquad (3)$$

Пример: Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млрд. руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млрд. руб.

Решение: **Капиталовложения задаются функцией $f(x) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Удельная процентная ставка $i = 0{,}08$. Тогда по формуле (3) дисконтированная сумма капиталовложений равна:**

$$\left.\begin{array}{c} 10+t=u \\ dt=du \\ e^{-0,08t}dt=dv \\ -\dfrac{100}{8}e^{-0,08t}=v \end{array}\right| \quad k=\int_0^3 (10+t)\cdot e^{-0,08t}dt = -\frac{100}{8}e^{-0,08t}\cdot(10+t)\Big|_0^3 +$$

$$+\frac{100}{8}\int e^{-0,08t}dt = 30,5$$

Следовательно, $k = 30{,}5$ млрд. руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млрд. руб. равносильны одновременным

первоначальным вложениям 30,5 млрд. руб. при той же, начисляемой непрерывно процентной ставке.

Глава 7. Интегральное исчисление.

Часть 3. Несобственный интеграл. Кратные интегралы.

§1. Понятие несобственного интеграла.

При рассмотрении определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ как предела интегральных сумм предполагалось, что:

1. Подынтегральная функция ограничена, т.е. отрезок интегрирования *[a;b]* был конечным.

2. Подынтегральная функция была непрерывна и определена на отрезке *[a; b]*.

Такой определенный интеграл называется собственным.

Определение 1. Если одно или оба из этих условий нарушается, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется несобственным.

Пример:

1) $\int\limits_0^{\infty} x\,dx$ - нарушено 1-е условие;

2) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x-2}$ - нарушено 2-е условие.

§2. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $[a; +\infty)$ и интегрируется в любом конечном отрезке $[a;b]$ этого интервала, при условии, что $a < b$.

Определение 1. **Если при $b \to$ · для $\int_a^b f\ (x)\ dx$ существует конечный предел, то такой интеграл называется несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом.**

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx} \qquad (1)$$

Определение 2. **Если $\lim\limits_{n\to} \int_a^b f\ (x)\ dx$ существует, то несобственный интеграл называется сходящимся. В противном случае интеграл называется расходящимся и ему не приписывают никакого числового значения. Аналогично можно рассмотреть интеграл:**

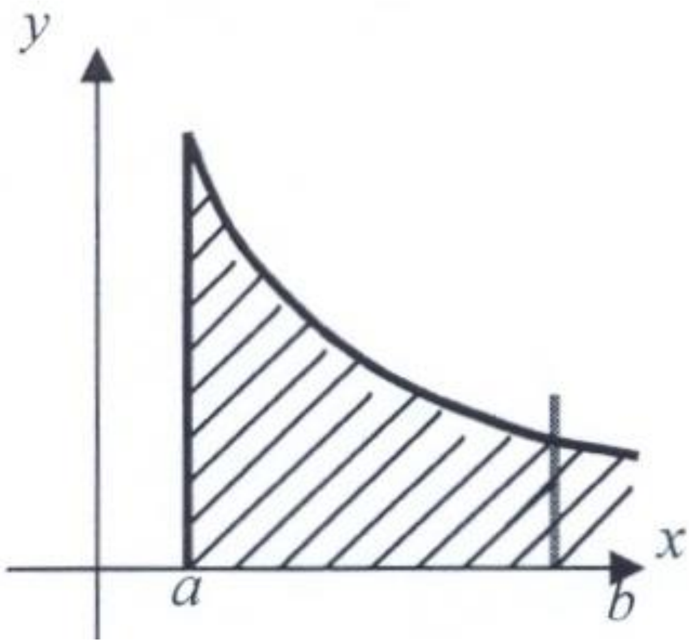
$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

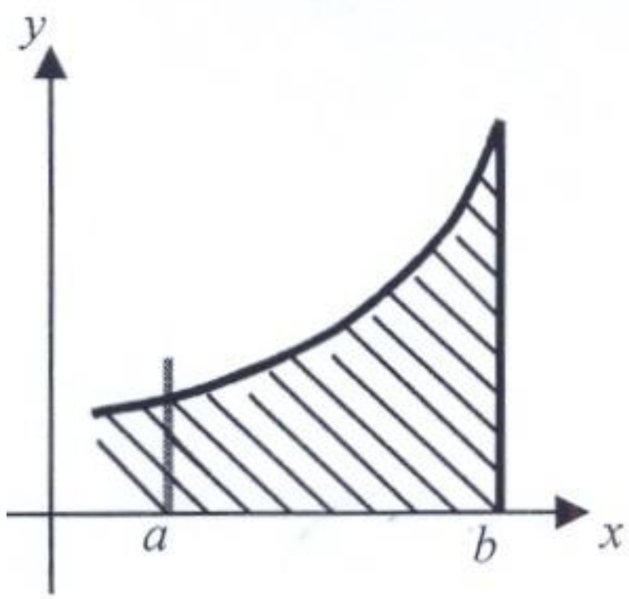
(несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом).

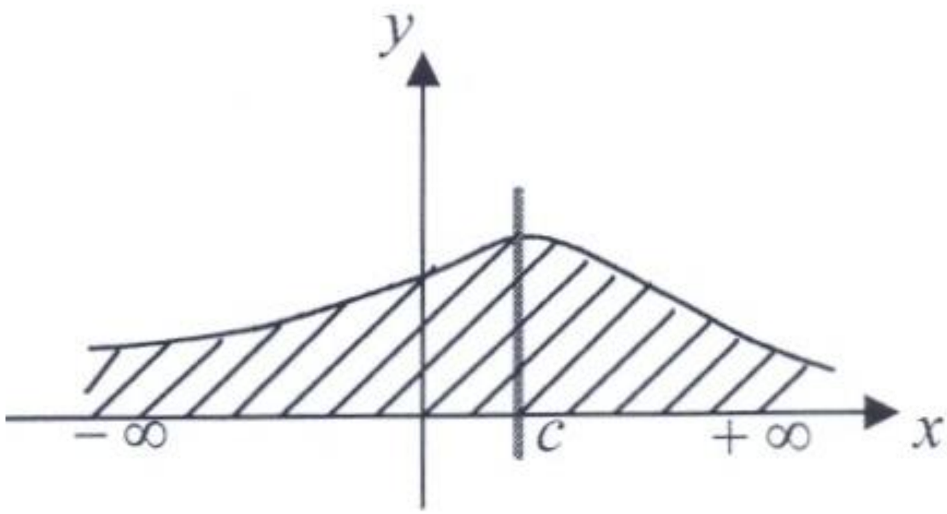
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

где c - фиксированное число (лучше принимать $c=0$)

С геометрической точки зрения несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования представляет собой площадь криволинейной трапеции (если интеграл сходится).



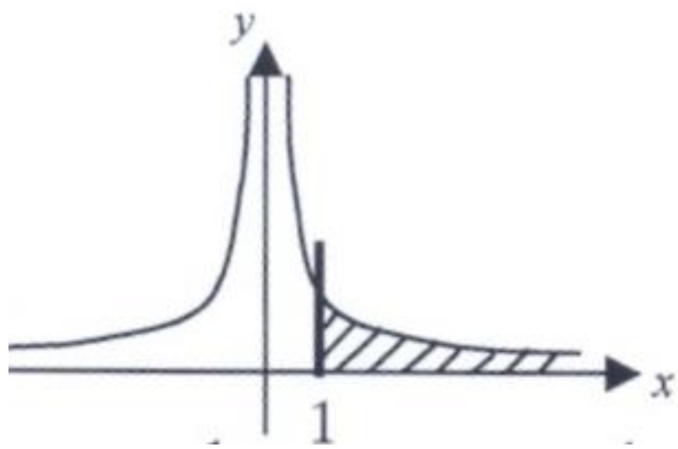




Пример 1:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\right)\Bigg|_1^b=$$

– предел конечный, интеграл сходится.



Пример 2:

$$\int_0^{\infty} x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}(b^2 - 0) = \frac{1}{2}\cdot(\infty -$$

- интеграл расходится.

Пример 3:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0$$

$$- arctg0) = arctg0 - arctg(-\infty) +$$

$= \pi - e$ **- интеграл сходится.**

§3. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ **непрерывна при** $x \in [a;b)$, **т.е.** $a \leq x < b$ **. Значит,** $x = b$ **- точка разрыва.**

При этом предполагается, что на любом отрезке *[a; b -* ε *]* функция $y = f(x)$ непрерывна и интегрируема.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx} \qquad (2)$$

Определение 1. Как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, если существует конечный предел (2), то его называют несобственным интегралом от разрывной функции. Если предел конечный, то интеграл будет сходящимся, если бесконечный, то интеграл расходящийся. Аналогично рассматриваются интегралы при условии, что $a < x \le b$, $x=a$ - точка разрыва, тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon+a}^b f(x)\,dx}$$

Можно рассматривать интегралы от функции $y = f(x)$ при условии, что $x = c$ - точка разрыва, если

$a < c < b.$

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

Пример 1: Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^a \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^{a-\varepsilon} \right) =$$

$$= a \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin \frac{a - \varepsilon}{a} - \arcsin 0 \right) =$$

$$= a\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)\right) = a\cdot\arcsin(1-0) =$$

$$= a\cdot\arcsin 1 = a\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2}$$

- предел конечный, интеграл сходящийся.

Пример

2.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{0-\varepsilon} + \frac{1}{1}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 - \frac{1}{0+\varepsilon}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{0}+1\right) - \left(1-\frac{1}{0}\right) = -\infty + 1 - 1 + \infty = \infty$$

- интеграл расходится.

Покажем, что было бы, если этот интеграл взять как обычный определенный интеграл.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2 \text{ - !!!}$$

Этот результат неверный, так как

функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2}>0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx>0.$

§4. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Во многих случаях бывает достаточно только установить сходимость или расходимость данного несобственного интеграла.

Теорема 1. (признак сравнения несобственных интегралов).

Если функции *f (x)* и *q (x)* непрерывны на интервале *[a; +∞)* и удовлетворяют условию $0 \le f$

(x) $\leq$ *q(x)*, то из сходимости интеграла $\int_a^\infty q(x)\,dx$ следует сходимость*(x) dx*. И наоборот, если расходится

$\int_a^\infty f(x)dx$, то расходится и*(x)dx* (без доказательства).

Пример 1. Исследовать интеграл на сходимость

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$, если $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ - сходится.

Так как функции $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x^4}$ непрерывны на $[1; \infty)$ и

$0 < \frac{1}{x^4} < \frac{1}{x^2}$ - то по теореме $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ - сходится.

Аналогично можно рассмотреть этот признак для несобственных интегралов от разрывных функций.

Если функции *f (x)* и *q (x)* непрерывны на интервале $[a; b)$ и для всех точек в некоторой окрестности особой точки b выполняются условия $0 \leq f(x) \leq q(x)$, то из сходимости $\int_a^b q(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b q(x)dx$.

Теорема 2. (критерий Коши). Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы для а любого $\varepsilon > 0$ можно было найти такое число $A > 0$, что для любых R' и R'', больших, чем A, выполняется неравенство:

$$\boxed{\left|F(R'')-F(R')\right| = \left|\int_{R'}^{R''} f(x)dx\right| < \varepsilon}$$, где

$$F(R)=\int_a^R f(x)\,dx \quad \text{(без доказательства)}$$

Определение 1.

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

Определение 2.

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется условно сходящийся, если он сходится, а интеграл

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx \quad \text{расходится.}$$

Теорема 3. (признак Дирихле – Абеля).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x)$ на промежутке

[a; ∞), а функция *q (x)* имеет непрерывную производную на этом промежутке, не возрастает и стремится к нулю при $x \to \infty$. Тогда, несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x) \cdot q(x)\,dx$ сходится (без доказательства).

Пример: Исследовать интеграл на сходимость:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \text{ , при } \alpha > 0$$

Пусть $f(x) = \sin x$; $q(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Легко убедиться, что все условия теоремы выполнимы, т.е. данный интеграл сходится.

При $\alpha > 1$ данный интеграл сходится абсолютно.

Действительно, $|\sin x| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, значит, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится. А по признаку сравнения сходится абсолютно и данный интеграл.