

Глава 1. Основные понятия теории вероятностей.

§1. Элементы комбинаторики.

Определение 1. Комбинаторика – это раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов.

Определение 2. Различные группы, составленные из каких – либо элементов, и отличающиеся одна от другой либо их порядком, либо элементами, называются *соединениями*.

Различают три вида соединений:

1. *перестановки;*
2. *сочетания;*
3. *размещения.*

Определение 3. Перестановками называются такие соединения из «n» элементов, которые составлены из одних и тех же элементов и отличаются только порядком следования элементов.

Обозначаются перестановки P_n

$$P_n = n !$$

$$0! = 1$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$1! = 1$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$n! = 1 \dots (n-2)(n-1) \cdot n$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Пример: Сколькими способами можно разместить 5 человек за одним столом?
 $n = 5$; $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Определение 4. Сочетаниями называются такие соединения, которые взяты из «n» элементов по «m» в каждом и отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (порядок следования элементов не учитывается).

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример: Сколькими способами можно заполнить карточки спортлото 6 из 49?

$$\begin{array}{l|l} n = 49 \\ m = 6 \\ C_{49}^6 - ? \end{array} \quad C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{\cancel{49}!^{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}}{6! \cdot \cancel{43}!} = \frac{\overset{11}{\cancel{44}} \cdot \overset{3}{\cancel{45}} \cdot \overset{23}{\cancel{46}} \cdot 47 \cdot \overset{8}{\cancel{48}} \cdot 49}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6}} =$$

$$= 11 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 8 \cdot 49 = 13\,983\,816$$

Определение 5. Размещениями называются соединения из «n» элементов по «m» в каждом, отличающиеся одно от другого как самими элементами, так и их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример: Сколькими способами можно составить расписание, состоящее из 3-х пар на 1 день по 7 предметам.

$$\begin{array}{l|l} n = 7 \\ m = 3 \\ A_7^3 - ? \end{array} \quad A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 210$$

§2. Предмет теории вероятностей.

В единичных случаях наступление многих явлений заранее предсказать нельзя, но если рассматривать их как массовые, однородные явления, то выявляются определенные закономерности.

Например, при подбрасывании монеты нельзя предсказать, какой стороной она упадет (орел или решка), при достаточно большом числе бросаний вскрывается закономерность: орел и решка выпадают приблизительно поровну.

Рождение близнецов - случайное событие, но при изучении этого события как массового, установлена закономерность: на каждые 1000 родов приходится в среднем 12 двойняшек и на каждые 8000 родов-1 тройня.

Устойчивость обнаруживают все массовые однородные явления: всхожесть семян, урожайность культур, плодovitость и продуктивность животных, число поражений мишени при большом числе выстрелов из одного и того же орудия и т.д.

Изучение закономерностей однородных массовых случайных явлений составляет *предмет теории вероятностей* и основанной на ней математической статистики.

§3. Основные понятия теории вероятностей. Пространство элементарных событий.

Испытание - это опыт, наблюдение, эксперимент.

Событие – это результат (исход) испытания.

Пример: сев зерен – испытание; всходы – событие

События обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C,

Определение 3. Событие называется *случайным*, если при данных испытаниях оно может произойти или нет; *достоверным*, если обязательно произойдет при данных испытаниях; *невозможным*, если при данных испытаниях никогда не произойдет.

Случайные события:

Пример: Бросают игральную кость.

Выпало 6 очков – событие случайное

- || - четное число очков – событие достоверное

- || - 0 очков событие невозможное.

Множество всех исходов данного явления называется пространством элементарных событий, относящихся к этому явлению.

§4. Классификация случайных событий. Множество всех исходов данного события

Определение 1. Событие $\bar{A}$, состоящее в не появлении события A , называется ему *противоположным*.

Пример: A – попадание в цель; $\bar{A}$ – промах.

Определение 2. События A , B , C называются *несовместными*, если в условиях данных испытаний возможно появление только одного из них, т.е. они не могут появиться одновременно.

Пример:

A – выпало 1 очко	} события несовместные
B – выпало 4 очка	
C – выпало 6 очков	

Замечание.

Противоположные события – это частный случай несовместных событий.

Определение 3. События *A* и *B* называются **независимыми**, если появление одного из них изменяет вероятность наступления другого.

Пример: Два стрелка стреляют в цель.

A – попал 1 – й стрелок	} независимые события
B – попал 2-й стрелок	

Определение 4. События *A* и *B* называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что в данных испытаниях событие *A* произойдет чаще, чем событие *B*.

Пример: При подбрасывании монеты выпадет орел или решка.

Определение 5. События *A*, *B* и *C* называются **единственно возможными**, если при данных испытаниях произойдет одно из них и никакое другое.

Пример: Светофор – после красного загорится желтый, затем - зеленый и т.д.

Определение 6. Совокупность всех несовместных и единственно возможных

событий называется *полной системой событий*.

Пример: Шкала оценок (1-5); число очков на игральной кости (1-6).

§5. Классическое определение вероятности.

Используется, когда исходы равновозможны и число их конечное.

Определение 1. Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих данному событию исходов к общему числу всех возможных и равновозможных исходов испытания.

Это классическое определение вероятности.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример: В коробке 30 карандашей, из них 5 красных. Карандаши перемешали. Какова вероятность того, что достанем красный карандаш.

$$\begin{array}{l|l} n = 30 & \\ m = 5 & \\ P(A) = ? & \end{array} \quad P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

Свойства вероятностей событий:

1. Вероятность достоверного события = 1

$$m = n; \quad P(D) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

2. Вероятность невозможного события = 0

$$m = 0 \quad P(H) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

3. Вероятность случайного события находится в пределах от 0 до 1, т.е. это правильная положительная дробь.

$$0 < P(C) < 1$$

4. Вероятность любого события удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

§6. Относительная частота (частость) события.

Пусть произведено N независимых испытаний на наступление события A и пусть событие A наступило ровно M раз.

Определение 1. *Относительной частотой* события A называется отношение числа испытаний, в которых событие наступило к общему числу проведенных испытаний.

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

$P(A)$ – до опыта

$W(A)$ – после проведения опыта

Пример: В партии 100 изделий, из которых 4-бракованные. Какова частота появления бракованного изделия?

$$\begin{array}{l|l} N = 100 & \\ M = 4 & \\ W(A) - ? & W(A) = \frac{4}{100} = 0,04 \end{array}$$

§7. Статистическая вероятность события.

Пусть проведена серия **N**- испытаний

N_1 - событие **A** наступило M_1 раз

N_2 - событие **A** наступило M_2 раз

.....

N_k - событие **A** наступило M_k раз.

$$W_1 = \frac{M_1}{N_1}; \quad W_2 = \frac{M_2}{N_2}; \quad \dots; \quad W_k = \frac{M_k}{N_k}, \text{ т.е.}$$

Получена последовательность частот

$W_1, W_2 \dots W_k \dots$

Определение 1. Предел последовательности относительных частот при $N \rightarrow \infty$ называется **статистической вероятностью события**.

$$\tilde{P}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}$$

Статистическое определение вероятности, как и понятия и методы теории вероятностей в целом, применимы не к любым событиям с неопределенным исходом, а только к тем из них, которые обладают определенными свойствами.

§8. Геометрическое определение вероятности.

Определение 1. **Геометрической вероятностью** события **A** называется **отношение геометрических мер: длин, площадей, объемов**.

Пример. Произошел обрыв телефонной линии, соединяющей пункты **A** и **B**, расстояние между которыми 2000м.

Какова вероятность того, что обрыв произошел в 400м от пункта A?

Решение.

$L=2000$, $l=400$

$$P=400:2000=0,2$$

§9. Алгебра событий.

Определение 1. *Суммой* (объединением) двух событий A и B называют такое событие C , которое состоит в том, что наступит хотя бы одно из этих событий.

$$C = A + B \quad ; \quad C = A \cup B$$

Для совместных событий: или A , или B , или A и B вместе.

Для несовместных событий: или A , или B .

Пример: A - 1-й стрелок попал

B - 2-й стрелок попал

$C = A + B$ – цель поражена

Определение 2. *Произведением* (совмещением) двух событий A и B называется такое событие C , которое состоит в совместном наступлении событий A и B .

$$C = A \cdot B \quad ; \quad C = A \cap B$$

и событие A , и событие B .

Пример: A - 1-й стрелок попал

B - 2-й стрелок попал

$C = A \cdot B$ – оба стрелка попали.

Пример: Пусть A – высказывание «Первая бригада выполнила план», B – высказывание «Вторая бригада выполнила план». Записать в виде формул следующие высказывания:

а) «Хотя бы одна бригада выполнила план»

б) «Обе бригады выполнили план»

в) «Ни одна бригада не выполнила план»

г) «План выполнила только первая бригада»

д) «План выполнила только вторая бригада»

е) «План выполнила только одна бригада»

Решение:

а) $A + B$

б) $A \cdot B$

в) $\bar{A} \cdot \bar{B}$

г) $A \cdot \bar{B}$

д) $\bar{A} \cdot B$

е) $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

§10. Понятие условной вероятности.

Как отмечено выше, вероятность $P(B)$ как мера степени объективной возможности

наступления события ***V*** имеем смысл при выполнении определенного комплекса условий. При изменении условий вероятность события ***V*** может измениться.

Определение 1. Вероятность события ***V***, зависящего от ***A***, вычисленная при условии, что произошло ***A***, называется ***условной вероятностью*** события ***V*** и обозначается.

$$P_A(B)$$

Пример: Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 15. Какова вероятность того, что 2-го августа будет дождь?

Пусть ***A*** – событие 1.08 – дождь,
B – событие 2.08 - дождь

$n = 31$ $\underline{m_\delta = 15}$	Если <i>A</i> произошло	Если <i>A</i> не произошло
	<i>A</i> – 1.08 - дождь	1.08 - ясно
	<i>B</i> - 2.08 - дождь	<i>B</i> - 2.08 - дождь
	$n = 30 \quad m_\delta = 14$	$n = 30 \quad ; \quad m_\delta = 15$
	$P(B) = \frac{14}{30}$	$P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

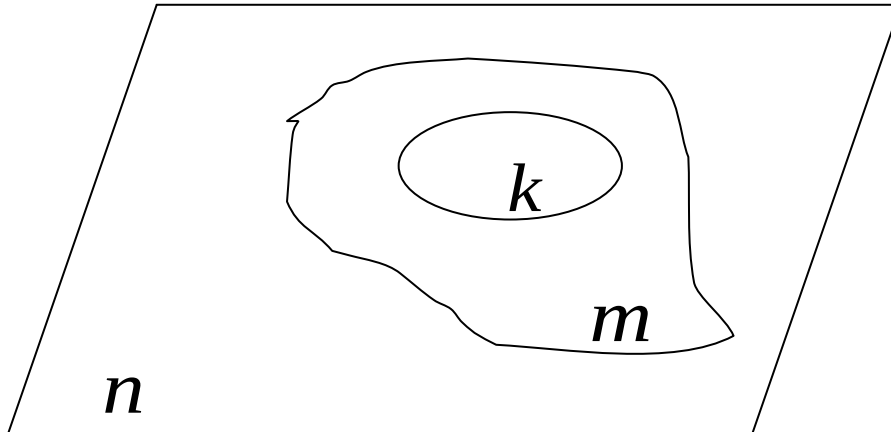
B – зависит от ***A***, $P_A(B) = \frac{14}{30}$

§11. Теорема умножения двух зависимых событий.

Теорема. Вероятность совместного наступления двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие уже произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad (1)$$

Доказательство: Пусть проводится « n » независимых испытаний.



Событие A благоприятствует m исходам ($m \leq n$). Событие B благоприятствует k исходам ($k \leq m$), при условии, что событие A произошло.

Тогда

$P(A) = \frac{m}{n}$; $P_A(B) = \frac{k}{m}$, а т.к. события **A** и **B** могут произойти вместе только в «k» случаях, то

$$P(A \cdot B) = \frac{k}{n} ; P(A \cdot B) = \frac{k}{n} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m}{n} = P(A) \cdot P_A(B) ,$$

ч.т.д.

Следствие 1. Теорема (1) легко обобщается на случай произвольного числа событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot \underset{A_1}{P(A_2)} \cdot \underset{A_1 A_2}{P(A_3)} \cdot \dots \cdot \underset{A_1 \dots A_{n-1}}{P(A_n)}$$

При этом вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

Следствие 2. Для любого из событий **A** и **B** справедливо равенство

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) , \quad \text{т.е.}$$

теорема (1) обладает коммутативностью умножения $A \cdot B = B \cdot A$

Пример: См. условие предыдущей задачи. К.в.т.,ч. 1, 2, 3 августа будут дождливы?

A – 1.08. – дождь

B – 2.08. – дождь

C – 3.08. – дождь

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cdot B}(C)$$

$$P(A) = \frac{15}{31} \quad ; \quad P_A(B) = \frac{14}{30} \quad ; \quad P_{A \cdot B}(C) = \frac{13}{29}$$

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{\cancel{15}}{31} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{8}{\cancel{30}}} \cdot \frac{13}{29} = \frac{91}{899} = 0,1$$

§12. Теорема умножения для независимых событий.

Пусть события A и B – независимы, тогда $P_A(B) = P(B)$

Теорема. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)} \quad (2)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Пример: Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. К.в.т.,ч. все три вынутые детали окажутся нестандартными?

А- нестандартная деталь из 1-го ящика				независимые
В-	- -	- -	- -	
С-	- -	- -	- -	
			2-го ящика	
			3-го ящика	

$$P(A) = \frac{2}{10} \quad ; \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad ; \quad P(C) = \frac{1}{10}$$

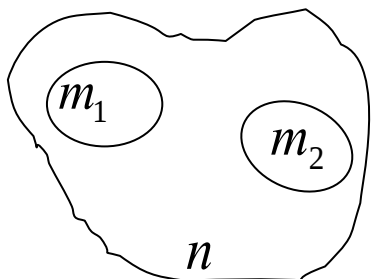
$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,006$$

§13. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Теорема. Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий **А** или **В** равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B)} \quad (3)$$

Доказательство:



Пусть проводится серия « n » независимых испытаний. Событию A благоприятствует « m_1 » исходов. Событию B благоприятствует « m_2 » исходов

$$P(A) = \frac{m_1}{n} \quad ; \quad P(B) = \frac{m_2}{n}$$

Т.к. события A и B несовместные, то ни один из случаев, благоприятствующих одному из этих событий, не благоприятствует другому. Поэтому событию $(A+B)$ будет благоприятствовать $(m_1 + m_2)$ случаев.

Следовательно,

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \underline{P(A) + P(B)} \text{ , ч.т.д.}$$

Пример: В денежно - вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150

**вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему
равна вероятность
выиг**

$n = 10000$	C – выигрыш	
$m_g = 150$	A – вещевой выигрыш	несовместные
$m_d = 50$	B – денежный выигрыш	
$P(C) = ?$	$C = A + B$ (или вещевой, или денежный) $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{150}{10000} + \frac{50}{10000} = \frac{200}{10000} = 0,02$	

**Следствие 1. Данная теорема справедлива для
«n» несовместных событий.**

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

**Следствие 2. Сумма вероятностей событий,
образующих полную систему, равна 1.**

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1$$

**Доказательство: Если $A_1, A_2, \dots, A_k$ - события
несовместные и единственно возможные, то
они образуют полную систему событий.**

**Так как события $A_1, A_2, \dots, A_k$ единственно
возможные, то событие $(A_1 + A_2 + \dots + A_k)$,
состоящее в появлении хотя бы одного из этих
событий, является событием достоверным,
т.е. его вероятность равна 1.**

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = 1$$

В силу того, что события $A_1, A_2, \dots, A_k$ - несовместные, к ним применима теорема сложения вероятностей, т.е.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = \underline{P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1}$$

ч.т.д.

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1},$$

где

A – данное событие, $\bar{A}$ – противоположное событие.

Данное утверждение следует из того, что противоположные события образуют полную систему событий. Принято обозначать

$P(A) = p; P(\bar{A}) = q$. Следовательно $\boxed{p + q = 1}$.

Пример. Если вероятность попадания в цель $p = 0,8$, то вероятность промаха $q = 0,2$.

§14. Теорема сложения для совместных событий.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)} \quad (4)$$

В случае 3-х и более совместных событий формула будет очень громоздка. Так, для 3-х событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Поэтому проще перейти к противоположному событию и использовать формулу:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_k})$$

или $\boxed{P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots}$.

Определение 1. Вероятность суммы событий $A_1, A_2 \dots A_k$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}; \overline{A_2} \dots \overline{A_k}$.

Частный случай. Если события $A_1, A_2 \dots A_k$ имеют одинаковую вероятность, равную «р», то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна:

$$P(A) = 1 - q^k$$

Пример: В типографии имеется 4 плоскочечатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент = 0,9. К.в.т., ч. в данный

момент работает хотя бы одна машина (событие A).

$$\begin{array}{l|l} p = 0,9 \\ q = 1 - 0,9 = 0,1 \\ \hline P(A) = ? \end{array} \quad P(A) = 1 - q^4 = 1 - (0,1)^4 = 1 - 0,0001 = 0,9999$$

Замечание. При использовании формулы (4) следует иметь в виду, что события A и B могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Для зависимых событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$$

Пример 1: Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятность отказа 1-го из них – 0,05; 2-го – 0,08. К.в.т., ч. откажет все устройство, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент?

$P_1 = P(A_1) = 0,05$	A_1 и A_2 – совместные события, независимые
$P_2 = P(A_2) = 0,08$	
$P(A_1 + A_2) - ?$	
$q_1 = 0,95$	
$q_2 = 0,92$	

$$\begin{aligned}
 &1) P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,05 + 0,08 - 0,05 \cdot 0,08 \\
 &\quad = 0,13 - 0,004 = 0,126 \\
 &2) P(A_1 + A_2) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,95 \cdot 0,92 = 1 - 0,874 = 0,126
 \end{aligned}$$

Пример 2: На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. К.в. выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено 2.

$n = 100$	A_1 – выиграл 1-й билет A_2 – – – 2-й билет совместные, зависимые
$m = 2$	
$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{5}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0,098$ $\Rightarrow \text{оба : 2-ой билет выигрывает, если выиграл 1-й}$	

§15. Вероятность появления только одного события.

Пусть вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны P_1 и P_2 . Найдем вероятность появления только одного из этих событий.

Имеем событие $\overline{A_1} A_2 + A_1 \overline{A_2}$

$$P = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2$$

Пример: Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка = 0,7, для 2-го = 0,8. К.в.т.,ч. при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

$p_1 = 0,7$	$P = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,14 + 0,24 = 0,38$
$p_2 = 0,8$	
$q_1 = 0,3$	
$q_2 = 0,2$	
$P = ?$	

§16. Формула полной вероятности.

Формула Байеса.

Теорема. Если событие A может произойти только при условии появления одного из событий (гипотез) $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную систему событий, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий (гипотез) на соответствующие условные вероятности события A .

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A), \text{ где } i=1, 2 \dots n$$

Доказательство:

По условию события (гипотезы) $B_1, B_2, \dots, B_n$ образуют полную систему $\Rightarrow$ они единственно возможные и несовместные. Т.к. гипотезы $B_1, B_2, \dots, B_n$ - единственно возможные, а событие A по условию теоремы может произойти только вместе с одной из гипотез, то

$$A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A + \dots + B_n \cdot A$$

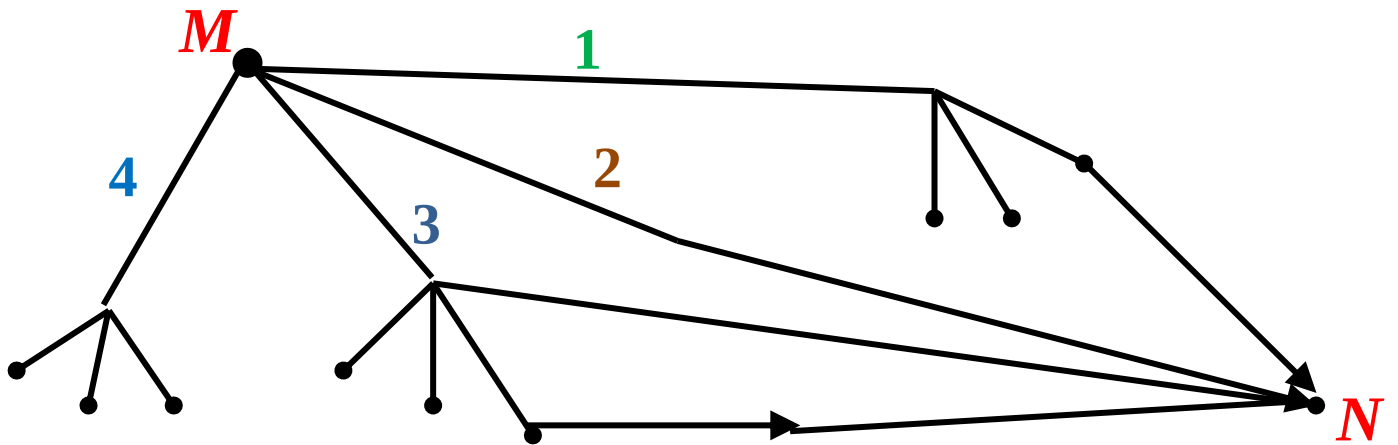
В силу того, что гипотезы $B_1, B_2, \dots, B_n$ несовместны, можно применить теорему сложения вероятностей:

$$P(A) = P(B_1 \cdot A) + P(B_2 \cdot A) + \dots + P(B_n \cdot A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cdot A)$$

По теореме умножения для зависимых событий $P(B_i \cdot A) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$, откуда получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cdot A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A), \text{ ч.т.д.}$$

Пример: Известна сеть дорог между пунктами **М** и **N**.



Какова вероятность того, что путник дойдет
из **M** в **N**?

A – путник дойдет.

B₁ – пошел по **1** дороге

B₂ – пошел по **2** дороге

B₃ – пошел по **3** дороге

B₄ – пошел по **4** дороге

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \\ + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + P(B_4) \cdot P_{B_4}(A)$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{1}{3};$$

$$P_{B_2}(A) = 1;$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$P_{B_4}(A) = 0;$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (1) + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (0) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{24} = \\ &\approx 0,46 \end{aligned}$$

Пример: В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. К.в.т.,ч. извлеченный шар окажется белым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение. A - извлечен белый шар

Гипотезы о первоначальном составе шаров:

B_1 - белых шаров нет;

B_2 - один белый шар;

B_3 - два белых шара.

Т.к. все гипотезы равновероятны и сумма их вероятностей = 1, то вероятность каждой из

гипотез = $1/3$, т.е. $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне не было белых шаров,

$P_{B_1}(A) = 1/3$ (по первой гипотезе)

По второй гипотезе - $P_{B_2}(A) = 2/3$

По третьей гипотезе - $P_{B_3}(A) = 3/3 = 1$

Искомую вероятность найдем по формуле:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула Байеса.

Она применяется, когда событие **A**, которое может появиться только с одной из гипотез $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную систему событий, произошло и необходимо произвести количественную переоценку априорных вероятностей этих гипотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$, известных до испытания,

т.е. надо найти апостериорные (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)} - \text{формула Байеса}$$

Доказательство:

Вспользуемся теоремой умножения вероятностей событий A и B_i в двух формах:

$$P(A \cdot B_i) = P(A) \cdot P_A(B_i) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A),$$

откуда

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \quad \text{с учетом формулы}$$

полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) \quad \text{имеем}$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}, \quad \text{Ч.Т.Д.}$$

Пример: Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность

первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. К.в.т.,ч. эта деталь произведена первым автоматом.

Решение: **A** - деталь отличного качества.

Гипотезы

B_1 - деталь произведена первым автоматом;

B_2 - - || - 2-м - || - - || -

$$P(B_1) = 2/3 \quad P_{B_1}(A) = 0,6$$

$$P(B_2) = 1/3 \quad P_{B_2}(A) = 0,84$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \\ &= 2/3 \cdot 0,6 + 1/3 \cdot 0,84 = 0,68 \end{aligned}$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена 1-м автоматом по формуле Байеса равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17}$$