Теоретические основы электротехники

Лекция 4
Метод наложения. Теорема взаимности. Теорема компенсации. Замена нескольких параллельных ветвей с источниками ЭДС одной эквивалентной

преподаватель:
доцент кафедры электротехники,
автоматики и метрологии, к.п.н. ***Елена Артуровна Вахтина***

ПЛАН

1. Метод наложения.
2. Теорема взаимности
3. Теорема компенсации
4. Линейные соотношения в эл. цепях
5. Замена нескольких параллельных ветвей с источниками ЭДС одной эквивалентной

1. Метод наложения.

- **Принцип наложения:** ток/напряжение в любой ветви линейной электрической цепи (ЛЭЦ) может быть получен как сумма составляющих токов/напряжений, вызываемых в этой ветви поочередным действием источников энергии.

- **Метод наложения** (метод суперпозиции) заключается в определении **частичных** токов I_k' или напряжений U_k' при поочередном действии ЭДС $\boldsymbol{E_k}$ или тока $\boldsymbol{J_k}$ источников энергии и последующим алгебраическом сложении этих частичных токов или напряжений в каждой ветви.

$$I_k = \sum_{m+n} I_k' \qquad U_k = \sum_{m+n} U_k'$$

где *m* и *n* - число источников соответственно напряжения и тока.

1. Метод наложения.

Порядок расчета:

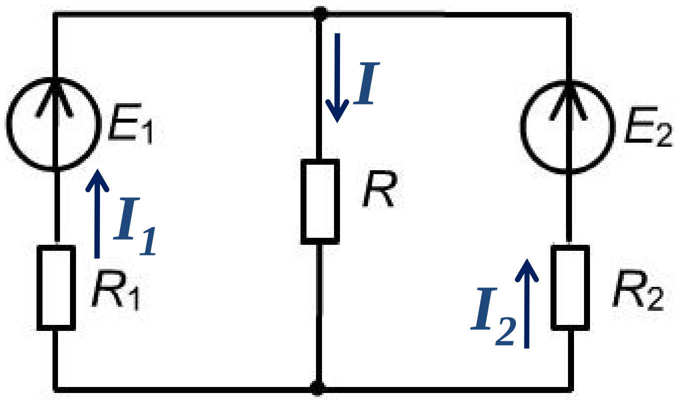
1) Поочередно расчитывают частичные токи от каждого источника энергии;
2) Затем находят реальные токи ветвей путем алгебраического сложения частичных токов

Внимание! При определении частичных токов ветвей от действия тока $\mathbf{J_k}$ или ЭДС $\mathbf{E_k}$ k-го источника энергии ветви с остальными **ИТ** разрываются, а идеальные **ИН** замыкаются накоротко, однако внутренние сопротивления **ИН** остаются в соответствующих ветвях.

1. Метод наложения.

ПРИМЕР 1

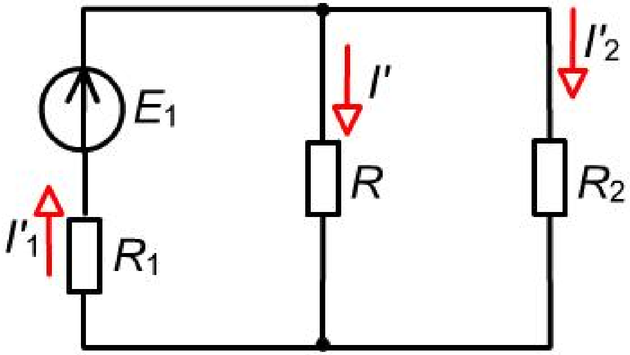
Расчета по методу наложения электрической цепи, содержащей два ИН ($\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$)в двух ветвях.



Определить токи ветвей схемы с параметрами: $E_1 = 12$ В, $E_2 = 5$ В, $R_1 = 2{,}4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R = 8$ Ом.

Решение. 1. Приминительно к исходной схеме выбираем условно положительные направления токов I_1, I и I_2.

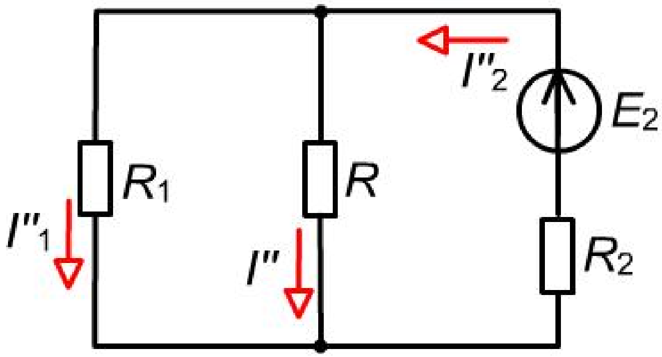
1. Метод наложения



2. Вычерчиваем расчетную схему с одним ИН E_1 и определяем частичные токи от действия ЭДС E_1:

$$R'_{экв} = R_1 + \frac{R\,R_2}{R + R_2} = 4\ \text{Ом};\quad I'_1 = E_1 / R'_{экв} = 3\ \text{А};$$

$$I' = I'_1 \frac{R_2}{R + R_2} = 0{,}6\ \text{А};\quad I'_2 = I'_1 \frac{R}{R + R_2} = 2{,}4\ \text{А}.$$



3. Вычерчиваем расчетную схему с ИН E_2 и находим частичные токи:

$$R''_{экв} = R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1} = 3{,}85\ \text{Ом};$$

$$I''_2 = E_2 / R''_{экв} = 1{,}3\ \text{А};$$

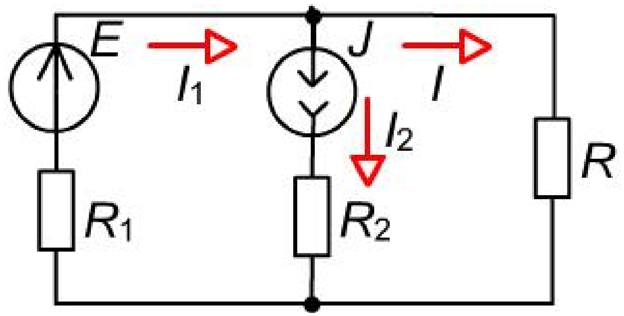
$$I'' = I''_2 \frac{R_1}{R+R_1} = 0{,}3\ \text{А};\quad I''_1 = I''_2 - I'' = 1\ \text{А}.$$

4. С учетом направлений частичных токов определяем токи в ветвях исходной электрической схемы:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 2\ \text{А};\ I = I' + I'' = 0{,}9\ \text{А};\ I_2 = -I'_2 + I''_2 = -1{,}1\text{А}.$$

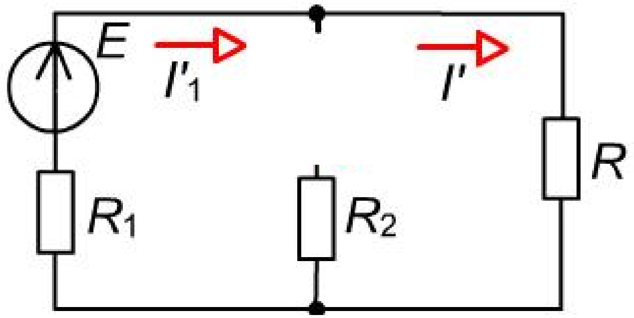
1. Метод наложения

ПРИМЕР 2



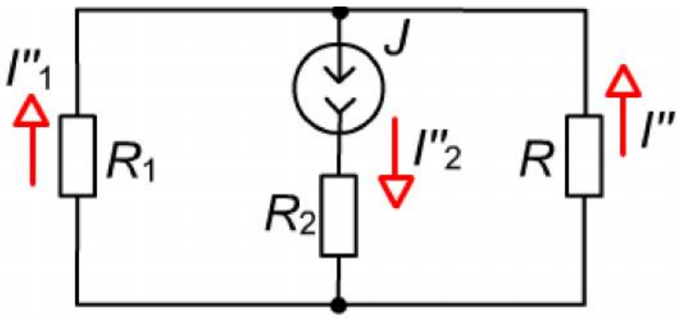
Найти токи в ветвях схемы с параметрами: E = 10 В, J = 5 А, R_1 = 2 Ом, R_2 = 4 Ом, R = 8 Ом.

Решение



Частичные токи в схеме, в которой действует только источник ЭДС E:

$$I'_1 = I' = E\,/\,(R_1 + R) = 1\ \text{А}.$$



Частичные токи в схеме, в которой действует только источник тока J:

$$I''_2 = J = 5\ \text{А};$$

$$I'' = JR_1\,/\,(R + R_1) = 1\ \text{А};$$

$$I''_1 = JR\,/\,(R + R_1) = 4\ \text{А}.$$

Искомые токи ветвей:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 5\ \text{А};$$

$$I_2 = J = 5\ \text{А};$$

$$I = I' - I'' = 0.$$

1. Метод наложения

Недостатком метода является необходимость повышенной точности расчетов.

Замечание

Методом наложения нельзя пользоваться для подсчета выделяемых в сопротивлениях мощностей, как суммы мощностей от частичных токов, поскольку мощность является квадратичной функцией тока.

Пусть через R протекают согласно направленные два тока I_1 и I_2, тогда выделяемая мощность: $P = R \cdot (I_1 + I_2)^2$.

Она не равна сумме мощностей от частичных токов

$P \neq R \cdot I_1^2 + R \cdot I_2^2$

2. Теорема взаимности

В любой, сколь угодно сложной цепи ток в ***к***-той ветви $\boldsymbol{I_к}$, вызванный ЭДС $\boldsymbol{E_m}$, находящейся в m-той ветви

$$\boldsymbol{I_k = E_m \cdot g_{km}},$$

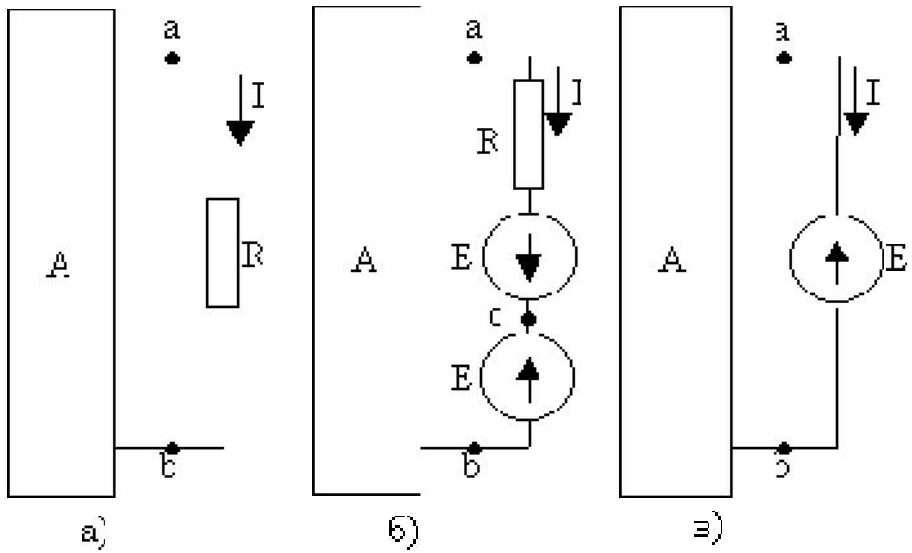
будет равен току $\boldsymbol{I_m}$ в m-той ветви, вызванному ЭДС $\boldsymbol{Eк}$ (численно равной ЭДС $\boldsymbol{Em}$), находящейся в ***к***-той ветви.

$$\boldsymbol{I_m = E_k \cdot g_{mk}}$$

Действительно, ЭДС $\boldsymbol{E_m = E_к}$ – по условию, взаимные проводимости $\boldsymbol{g_{км} = g_{мк}}$ – в силу симметрии определителя системы (Δ) относительно главной диагонали.

Поэтому $\boldsymbol{I_k = I_m}$

3. Теорема компенсации



В любой эл. цепи без изменения токораспределения в ней сопротивление может быть заменено ЭДС, численно равной падению напряжения

$$E = I \cdot R$$

в заменяемом сопротивлении и направленной встречно току в этом сопротивлении

4. Линейные соотношения в электрических цепях

Если в ЛЭЦ изменяется **ЭДС** или **сопротивление** в какой-либо одной ветви, то две любые величины (**токи** и **напряжения**) двух любых ветвей связаны друг с другом линейными зависимостями вида:

$$У = a + bX,$$

где X – **ток** / **напряжение** одной ветви,

$У$ - **ток** / **напряжение** другой ветви.

Доказательство:

Согласно методу контурных токов

$$I_k = E_1 \cdot g_{k1} + E_2 \cdot g_{k2} + E_3 \cdot g_{k3} + \ldots + E_k \cdot g_{kk} + \ldots + E_n \cdot g_{kn} \quad (1)$$

Если в схеме изменяется только одна ЭДС, например E_m, то все слагаемые в (1), кроме слагаемого $E_m \cdot g_{km}$, постоянны и могут быть для сокращения записи заменены некоторым слагаемым ($A_к$).

$$I_k = A_k + E_m \cdot g_{km} \quad (2)$$

4. Линейные соотношения в электрических цепях

Аналогичное выражение можно записать для тока в ***p***-той ветви

$$\boldsymbol{I_p = A_p + E_m \cdot g_{pm}} \qquad (3)$$

Выразим $\boldsymbol{E_m}$ из (3) и подставим в (2), получим

$$E_m = \frac{I_p - A_p}{g_{pm}} \qquad \boxed{\boldsymbol{I_k = a_k + b_k \cdot I_p}} \qquad (4)$$

Здесь $a_k = A_k - A_p \cdot \dfrac{g_{km}}{g_{pm}}$ и $b_k = \dfrac{g_{km}}{g_{pm}}$

Из (4) следует что при изменении ЭДС $\boldsymbol{E_m}$ токи $\boldsymbol{I_k}$ и $\boldsymbol{I_p}$ связаны между собой линейной зависимостью.

Соотношения (4) будут использоваться при построении **<u>круговых диаграмм</u>** токов и напряжений.

4. Линейные соотношения в электрических цепях

- Из теоремы компенсации известно, что любое сопротивление может быть заменено ЭДС.

- Следовательно, изменение сопротивления в $\boldsymbol{m}$-той ветви эквивалентно изменению ЭДС $\boldsymbol{E_m}$. Таким образом, линейное соотношение между двумя любыми токами (4) имеет место не только при изменении (ЭДС $\boldsymbol{E_m}$), но и при изменении сопротивления какой-то ($\boldsymbol{m}$-той) ветви.

- Если обе части выражения (2) умножить на сопротивление ($\boldsymbol{к}$-той) ветви ($\boldsymbol{R_к}$) и проделать аналогичные выкладки, то можно убедиться в том, что напряжения на $\boldsymbol{к}$-той ветви линейно связано с током в $\boldsymbol{p}$-той ветви.

- Коэффициенты ($\boldsymbol{a_k}$ и $\boldsymbol{b_k}$) могут быть определены либо расчетным, либо опытным путем.

4. Линейные соотношения в электрических цепях

При опытном определении коэффициентов достаточно определить значения двух <u>токов</u> /<u>напряжений</u> в двух опытах и затем решить систему из двух уравнений.

Например,

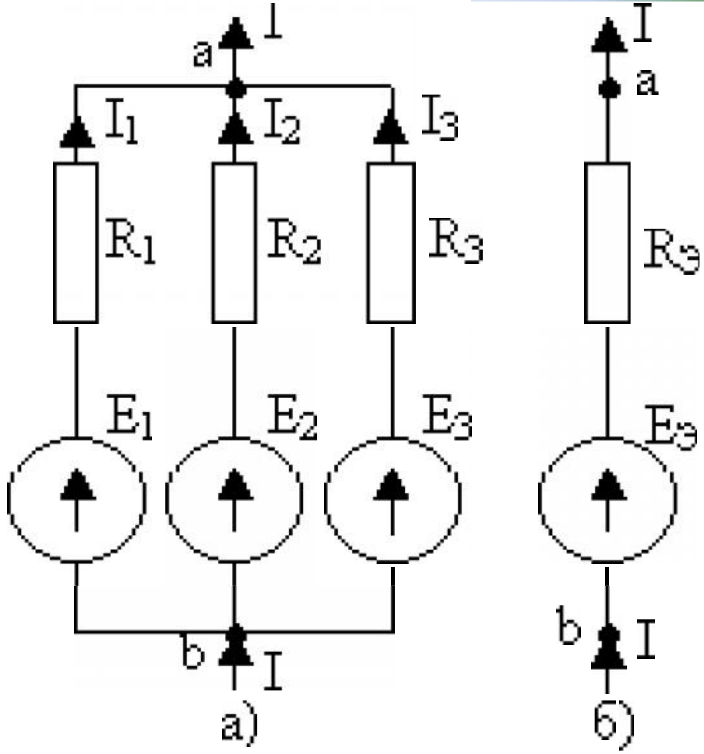
в первом опыте $I_k = I_{k1};\ I_p = I_{p1}$,

а во втором $I_k = I_{k2};\ I_p = I_{p2}$,

тогда

$$\left.\begin{aligned} I_{k1} &= a_k + b_k \cdot I_{p1} \\ I_{k2} &= a_k + b_k \cdot I_{p2} \end{aligned}\right\} \qquad a_k = \frac{I_{k2} \cdot \dfrac{I_{p2}}{I_{p1}} \cdot I_{k1}}{1 - \dfrac{I_{p2}}{I_{p1}}} \qquad b_k = \frac{I_{k1} - a_k}{I_{p1}}$$

5. Замена нескольких параллельных ветвей с источником ЭДС одной эквивалентной



- Выделим из сложной электрической цепи участок (**ab**), содержащий три параллельные ветви с ЭДС E_1, E_2, E_3 (рис. а) и заменим его одной эквивалентной ветвью (рис. б).
- Участки будут эквивалентны, если ток и напряжение на участке (**ab**) U_{ab} в обеих схемах будут одинаковыми.
- Рассчитаем $E_э$ и $R_э$

По первому закону Кирхгофа $I = I_1 + I_2 + I_3$

По закону Ома для участка цепи с ЭДС

$$I_1 =(E_1 - U_{ab})/ R_1 = (E_1 - U_{ab})\cdot g_1$$
$$I_2 =(E_2 - U_{ab})/ R_2 = (E_2 - U_{ab})\cdot g_2 \qquad (5)$$
$$I_3 =(E_3 - U_{ab})/ R_3 = (E_3 - U_{ab})\cdot g_3 \text{ и т.д.}$$

5. Замена нескольких параллельных ветвей с источником ЭДС одной эквивалентной

Следовательно, общий ток равен

$$I = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} E_k \cdot g_k - U_{ab} \sum_{k=1}^{n} g_k \qquad (6)$$

Для эквивалентной схемы

$$\boldsymbol{I = E_э \cdot g_э - U_{ab} \cdot g_э,} \qquad (7)$$

где $g_э = \dfrac{1}{R_э}$

Равенство токов в схемах (рис. a и b) должно иметь место при

$$g_э = \sum_{k=1}^{n} g_k \qquad (8)$$

Но если слагаемые с $\boldsymbol{U_{ab}}$ в (6 и 7) равны, равны и токи $\boldsymbol{I}$ (по условию эквивалентности), то равны и левые слагаемые в выражениях (6 и 7), т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot g_k = E_э \cdot g_э$$

5. Замена нескольких параллельных ветвей с источником ЭДС одной эквивалентной

$$E_э = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot g_k}{\sum_{k=1}^{n} g_k} \qquad (9)$$

При расчетах по формуле (9) следует иметь в виду следующее:

- если в какой-либо ветви ЭДС будет отсутствовать, то соответствующее слагаемое в числителе (9) выпадает, но проводимость этой ветви учитывается в знаменателе (9);
- если какая-либо ЭДС имеет обратное направление (от a к b), то эта ЭДС учитывается в формуле (9) со знаком минус.

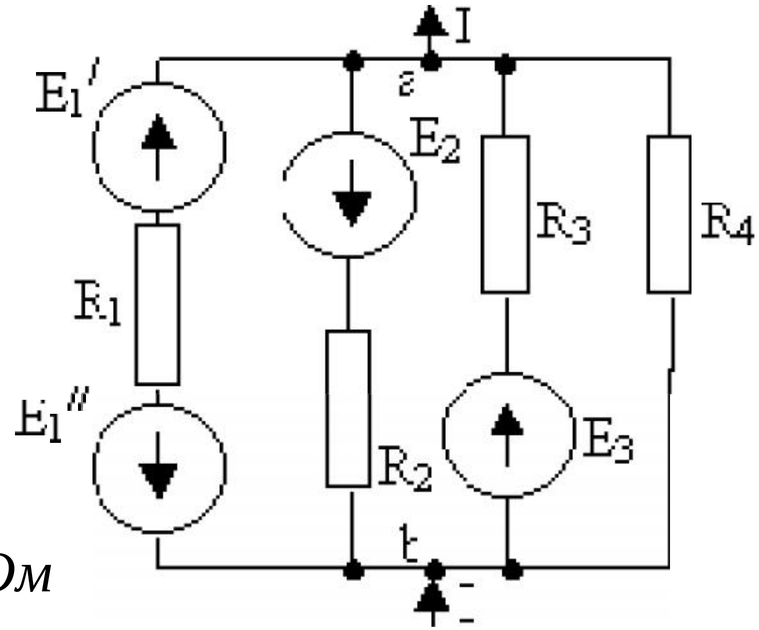
Замечание

Схемы рис. а и б эквивалентны только в смысле поведения их по отношению ко всей остальной части схемы (не показанной на рис.4), но не эквивалентны в отношении мощности, выделяющейся в самих этих схемах.

5. Замена нескольких параллельных ветвей с источником ЭДС одной эквивалентной

Пример

Заменить параллельные ветви схемы одной эквивалентной



Дано: E'_1 = 10 В; E''_1 = 30 В; E_2 = 40 В; E_3 = 60 В; R_1 = 2 Ом; R_2 = 4 Ом; R_3 = 1 Ом; R_4 = 5 Ом.

Решение: находим g_1 = 0,5 См; g_2 = 0,25 См; g_3 = 1 См; g_4 = 0,2 См

$$R_{эк} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{4} g_k} = \frac{1}{0{,}5 + 0{,}25 + 1 + 0{,}2} = 0{,}513\,Ом$$

$$E_{эк} = \frac{\sum_{k=1}^{4} E_k \cdot g_k}{\sum_{k=1}^{4} g_k} = \frac{(10 - 30) \cdot 0{,}5 - 40 \cdot 0{,}25 + 60 \cdot 1}{1{,}95} = 20{,}5\,В$$