Теоретические основы электротехники

Лекция 5
Активные и пассивные двухполюсники. Методы: эквивалентного генератора, узловых потенциалов. Передача энергии. Баланс мощностей

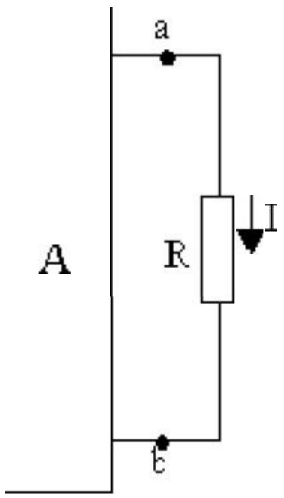
преподаватель:
доцент кафедры электротехники,
автоматики и метрологии, к.п.н. ***Елена Артуровна Вахтина***

ПЛАН

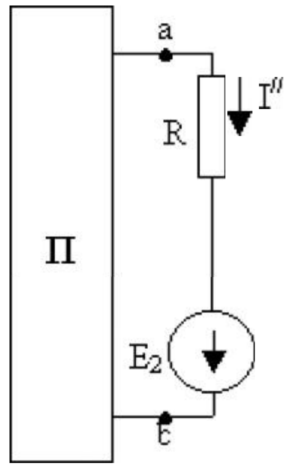
1. Активные и пассивные двухполюсники. Метод эквивалентного генератора
2. Метод двух узлов. Метод узловых потенциалов
3. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке
4. Передача энергии по линии электропередачи (ЛЭП)
5. Баланс мощностей

1. Активные и пассивные двухполюсники (АД и ПД)

В любой эл. схеме можно выделить какую-то ветвь, а всю остальную часть схемы изобразить некоторым прямоугольником, который наз. двухполюсником



- Если в двухполюснике есть ИН или ИТ, то такой двухполюсник называется **активным (А)**.
- Если в двухполюснике нет источников энергии, то его называют **пассивным** (ставится буква **П** или ничего не ставится).



ПАРАМЕТРЫ

1) напряжение холостого хода (Uxx);
2) входное сопротивление (Rвх) со стороны зажимов (ab)1)

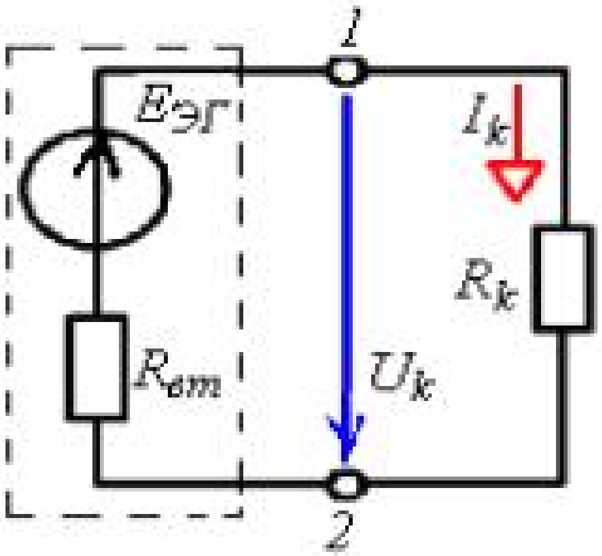
1) входное сопротивление (Rвх) со стороны зажимов (ab)1)

1. Метод эквивалентного генератора (ЭГ)

- Если требуется рассчитать ток **только в одной ветви** сложной схемы, то используется **метод ЭГ**.

- Метод **ЭГ** основан на теореме об эквивалентном генераторе; сложную схему электрической цепи с произвольным числом **ИН** и **ИТ** рассматривают как **АД** (см. рис.) по отношению к зажимам *1* и *2* ветви с искомым током, который определяют по выражению:

$$I_k = E_{ЭГ}/(R_{вт} + R_k),$$



где $E_{ЭГ} = U_{Xk}$ - ЭДС **ЭГ**, равная напряжению холостого хода между зажимами *1* и *2* отключенного пассивного элемента ветви с сопротивлением R_k;
$R_{вт}$ - внутреннее сопротивление **ЭГ**, равное входному сопротивлению цепи относительно разомкнутых зажимов *1* и *2* (при этом в цепи все идеальные **ИН** замыкаются накоротко, а ветви с **ИТ** - разрываются).

1. Метод ЭГ

Ограничения. Метод **ЭГ** не применим:
а) к ветви, индуктивно связанной с другими ветвями;
б) к ветви, имеющей зависимые источники энергии, или когда ток (или напряжение) рассматриваемой ветви является управляющим какого-либо зависимого источника энергии этой цепи

Примечание.
ЭГ может быть представлен **ИТ**

$$J_{ЭГ} = E_{ЭГ}/R_{вт}$$

и параллельно соединенным с ним резистором с проводимостью

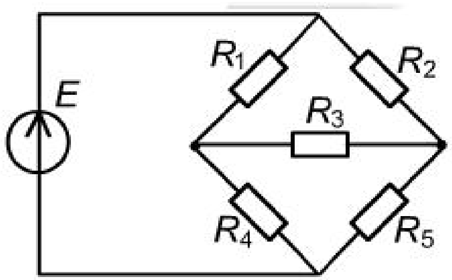
$$G_{вт} = 1/R_{вт}.$$

Тогда ток

$$I_k = J_{ЭГ}R_{вт}/(R_{вт} + R_k).$$

1. Метод ЭГ

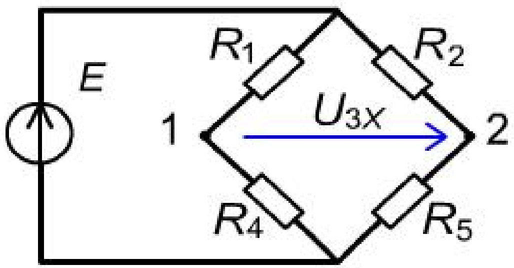
ПРИМЕР



Определить ток I_3 диагональной ветви схемы.

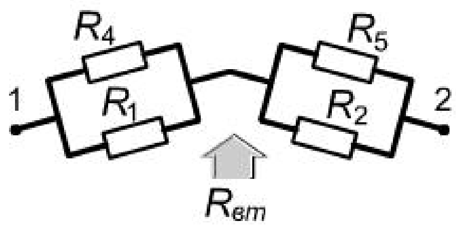
Решение:

1. Размыкаем ветвь $\boldsymbol{R_3}$



определяем рациональным методом напряжение $U_{3X} = E_{ЭГ}$, например как разность напряжений на участках R_4 и R_5.

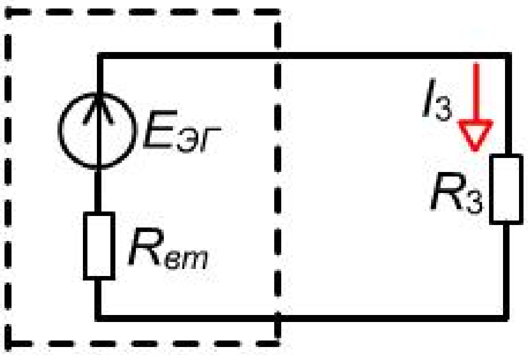
$$U_{12X} = \frac{E}{R_1 + R_4} R_4 - \frac{E}{R_2 + R_5} R_5.$$



2. Сопротивление $R_{вт}$ между зажимами 1 и 2 при $E = 0$ и разомкнутой ветви R_3

$$R_{вт} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}.$$

1. Метод ЭГ

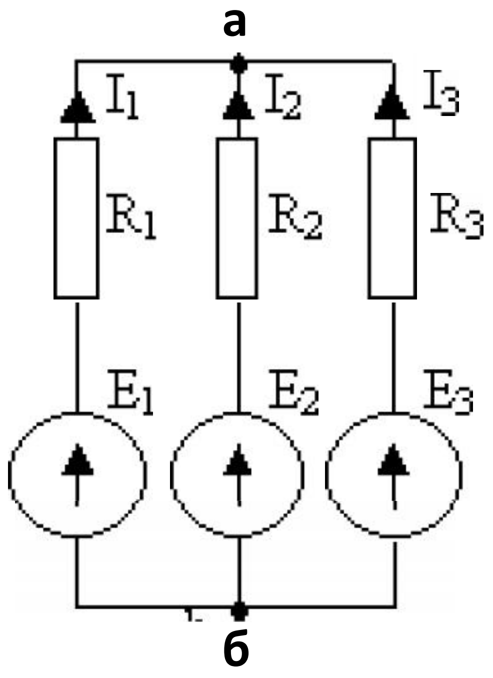


3.Ток в третьей ветви:

$$I_3 = \frac{E_{ЭГ}}{R_{вт} + R_3} = \frac{U_{3X}}{R_{вт} + R_3}.$$

2. Метод двух узлов

Применяется для расчета токов в схемах, имеющих всего два узла.



$$U_{ab} = \frac{\sum E_k \cdot g_k}{\sum g_k}$$

$$I_k = \frac{\pm E_k - U_{ab}}{R_k}$$

Примечание:

➢ ЭДС берутся со знаком (+) если они направлены к узлу (а) и наоборот.

➢ Если при расчетах токи получаются со знаком (+) то они подтекают к узлу (а) и наоборот.

2. Метод узловых потенциалов (УП)

Ток в любой ветви схемы может быть найден по закону Ома для участка цепи, содержащей ЭДС. Но чтобы применить закон Ома, надо знать потенциалы узлов схемы.

- Применяется в тех случаях, когда число узлов без единицы меньше числа независимых контуров
- Метод **УП** базируется на первом законе Кирхгофа (**1ЗК**) и обобщенном законе Ома.
- В методе **УП** за вспомогательные расчетные величины принимают **узловые напряжения** $\boldsymbol{U_{k0}}$ - напряжения между каждым из узлов схемы и выбранным базисным узлом (его потенциал принимаем = 0 обозначаем "0").
- Число уравнений для расчета схемы по методу **УП**: $\boldsymbol{K_{уп} = У - 1}$

2. Метод узловых потенциалов (УП)

Для каждого узла, кроме базисного, составляют уравнение по 1ЗК. В полученных уравнениях токи ветвей, присоединенных к базисному узлу, выражают через узловые напряжения и проводимости посредством обобщенного закона Ома:

$$I_k = (E_k - \phi_k)/R_k = (E_k - \phi_k)\cdot G_k,$$

где $G_k = 1/R_k$ - проводимость k-й ветви.

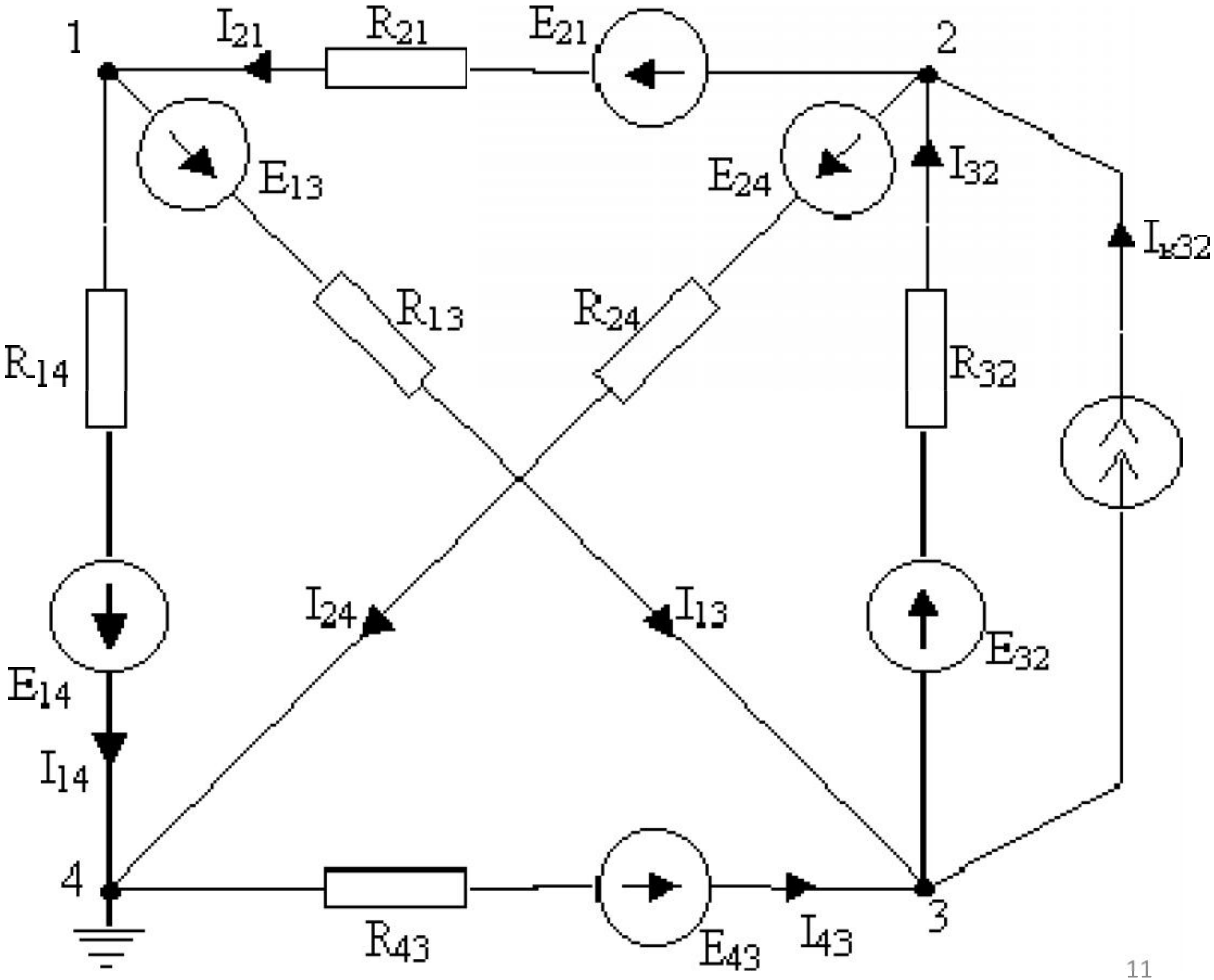
$$I_{kj} = [E_{kj}\ (\phi_j - \phi_k)]/R_{kj} = [E_{kj}\ (\phi_j - \phi_k)]\cdot G_{kj},$$

где $Gkj = 1/R_{kj}$ - межузловая проводимость.

Условимся, что токи будут иметь два индекса.
Первый индекс соответствует номеру узла, от которого ток утекает, второй индекс отвечает номеру узла, к которому ток подтекает.
Проводимости ветвей и ЭДС тоже будут иметь двойные индексы.

2. Метод узловых потенциалов (УП)

ПРИМЕР применения метода УП для расчета токов в схеме



заземлим 4-й узел, т.е. $\phi_4 = 0$

2. Метод узловых потенциалов (УП)

<u>Найти:</u> ϕ_1, ϕ_2 *и* ϕ_3

<u>Решение</u>

1. Составим уравнение по **1ЗК** для первого узла: $I_{21} - I_{13} - I_{14} = 0$

Запишем это уравнение через ЭДС и потенциалы узлов:

$$\left[E_{21} - (\varphi_1 - \varphi_2)\right] \cdot g_{21} - \left[E_{13} - (\varphi_3 - \varphi_1)\right] \cdot g_{13} - \left[E_{14} - (\varphi_4 - \varphi_1)\right] \cdot g_{14} = 0$$

2. Перемножим и сгруппируем потенциалы узлов со своими проводимостями:

$$E_{21}g_{21} - \varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{21} - E_{13}g_{13} + \varphi_3 g_{13} - \varphi_1 g_{13} - E_{14}g_{14} + \varphi_4 g_{14} - \varphi_1 g_{14} = 0$$

$$-\varphi_1 (g_{21} + g_{13} + g_{14}) + \varphi_2 \cdot g_{21} + \varphi_3 \cdot g_{13} + \varphi_4 \cdot g_{14} = -E_{21} \cdot g_{21} + E_{13} \cdot g_{13} + E_{14} \cdot g_{14}$$

3. Поменяем знаки:

$$\varphi_1 (g_{21} + g_{13} + g_{14}) - \varphi_2 \cdot g_{21} - \varphi_3 \cdot g_{13} - \varphi_4 \cdot g_{14} = E_{21} \cdot g_{21} - E_{13} \cdot g_{13} - E_{14} \cdot g_{14}$$

4. Введем обозначения:

$$G_{11} = g_{21} + g_{13} + g_{14}\,;\; G_{12} = -g_{21};\; G_{13} = -g_{13}$$

$$E_{21} \cdot g_{21} - E_{13} \cdot g_{13} - E_{14} \cdot g_{14} = I_{11}$$

2. Метод узловых потенциалов (УП)

5. Получим уравнение: $\boldsymbol{\varphi_1 \cdot G_{11} + \varphi_2 \cdot G_{12} + \varphi_3 \cdot G_{13} = I_{11}}$,
где G_{11} – сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в первом узле;
G_{12} – сумма проводимостей ветвей, соединяющих узел 1 с узлом 2;
G_{13} – сумма проводимостей ветвей, соединяющий узел 1 с узлом 3;
I_{11} – узловой током первого узла - расчетная величина, равная алгебраической сумме токов, полученных от деления ЭДС ветвей, подходящих к узлу (1), на сопротивления данных ветвей. В эту сумму входят со знаком (+) токи тех ветвей, ЭДС которых направлены к узлу 1.

6. Запишем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 \cdot G_{11} + \varphi_2 \cdot G_{12} + \varphi_3 \cdot G_{13} &= I_{11} \\
\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} + \varphi_3 \cdot G_{23} &= I_{22} \\
\varphi_1 \cdot G_{31} + \varphi_2 \cdot G_{32} + \varphi_3 \cdot G_{33} &= I_{33}
\end{aligned}\right\}$$

7. Замечание. При подсчете суммарных проводимостей G_{22}, G_{23}, G_{33} учтено, что проводимость ветвей с источником тока $I_{k32} = 0$. Сам же ток I_{k32} должен быть учтен со знаком (+) в узловом токе (I_{22}) и со знаком (–) в узловом токе (I_{33}).

2. Метод узловых потенциалов (УП)

8. Зная сопротивления ветвей, рассчитываются проводимости G_{11}, G_{22}, G_{33}, G_{12}, G_{13}, G_{23}. Известно, что $G_{12} = G_{21}$, $G_{13} = G_{31}$ и т.д.

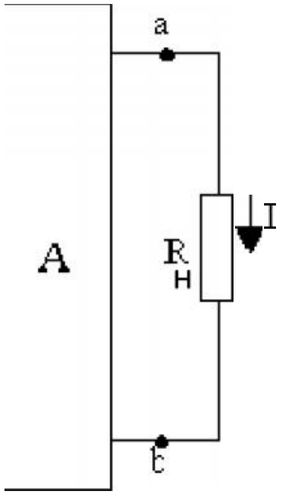
9. Зная ЭДС и проводимости ветвей, рассчитываются узловые токи I_{11}, I_{22}, I_{33}, т.е. правые части системы.

10. Потенциалы ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 определяются с помощью определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} \quad \varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_{11} & G_{12} & G_{13} \\ I_{22} & G_{22} & G_{23} \\ I_{33} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \varphi_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & I_{11} & G_{13} \\ G_{21} & I_{22} & G_{23} \\ G_{31} & I_{33} & G_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \varphi_3 = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & I_{11} \\ G_{21} & G_{22} & I_{22} \\ G_{31} & G_{32} & I_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

11. Далее по закону Ома находятся токи в ветвях: $I_{21} = \dfrac{E_{21} - (\varphi_1 - \varphi_2)}{R_{21}}$

3. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке



$$I = \frac{U_{xx}}{R_н + R_{вх}} \qquad P = I^2 \cdot R_н = \frac{U_{xx}^2 \cdot R_н}{(R_н + R_{вх})^2} \qquad (1)$$

<u>Задача</u>: при каком соотношении между сопротивлением нагрузки $\boldsymbol{R_н}$ и входным сопротивлением $\boldsymbol{R_{вх}}$ в нагрузке будет выделяться максимальная мощность, чему она равна и каков при этом КПД передачи.

$$\frac{dP}{dR_н} = \frac{U_{xx}^2 (R_н + R_{вх})^2 - U_{xx}^2 \cdot R_н (2R_н + 2R_{вх})}{(R_н + R_{вх})^4} = 0$$

$$\frac{(R_н + R_{вх}) - 2R_н}{(R_н + R_{вх})^3} = 0 \rightarrow \underline{\underline{R_н = R_{вх}}} \qquad (2)$$

3. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке

Подставим (2) в (1):

$$P_{макс} = \frac{U_{xx}^2 \cdot R_{вх}}{(R_{вх} + R_{вх})^2} = \frac{U_{xx}^2}{4R_{вх}}$$

$$P_{полн} = U_{xx} \cdot I = \frac{U_{xx}^2}{(R_н + R_{вх})}$$

Тогда КПД:

$$\eta = \frac{P}{P_{полн}} = \frac{U_{xx}^2 \cdot R_н}{(R_н + R_{вх})^2} : \frac{U_{xx}^2}{(R_н + R_{вх})} = \frac{R_н}{R_н + R_{вх}}$$

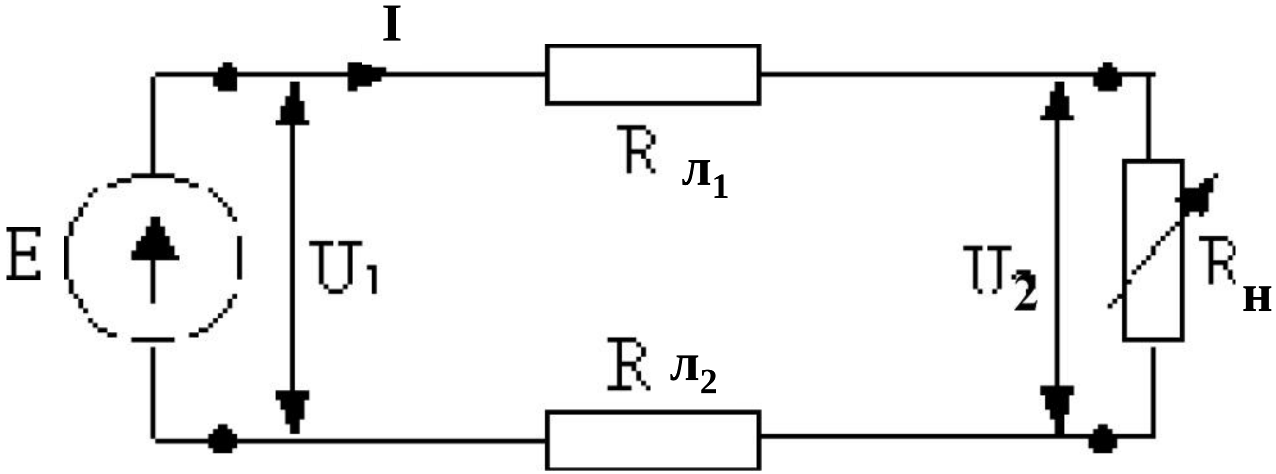
Если $\boldsymbol{R_н} = \boldsymbol{R_{вх}}$, то $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0,5}$

Если мощность ***P*** значительная, то работать с таким низким КПД недопустимо. Но если ***P*** мала, например, составляет всего несколько милливатт (датчики устройств автоматики), то с низким КПД можно не считаться, поскольку датчик отдает нагрузке максимально возможную мощность.

<u>При $\boldsymbol{R_н} = \boldsymbol{R_{вх}}$ нагрузка считается согласованной</u>.

4. Передача энергии по линии электропередачи (ЛЭП)

4. Передача энергии по линии электропередачи (ЛЭП)



ЛЭП работает при неизменном напряжении источника U_1 в начале линии

1. Ток $0 \le I \le I_{кз}$

$$I_{кз} = U_1 / R_л \qquad (R_л = R_{л1} + R_{л2})$$

2. U_2 с ростом I уменьшается по прямой линии

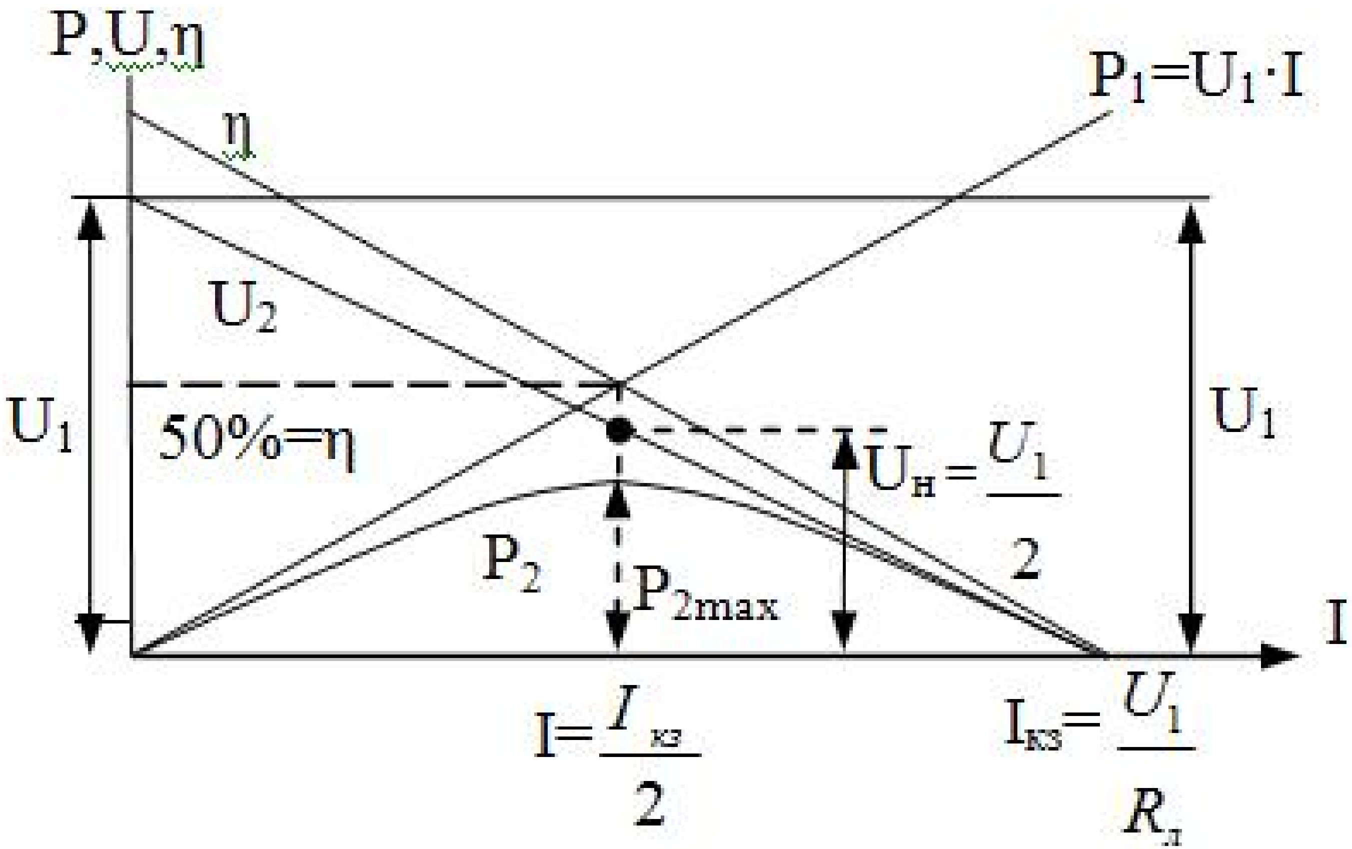
$$U_2 = U_1 - {}^{\uparrow}I \cdot R_л = U_1 - \Delta U_л$$

3. Мощность на нагрузке P_2 изменяется по дуге; максимальное ее значение при $R_н = R_л$

$$P_{max} = U_1^2 / 4R_л = I^2 \cdot R_н = \left(\frac{U_1}{R_н + R_л} \right)^2 \cdot R_н$$

4. Передача энергии по линии электропередачи (ЛЭП)

Основные закономерности, характеризующие режим работы ЛЭП



4. Передача энергии по линии электропередачи (ЛЭП)

Мощность, развиваемая источником $P_1 = U_1 \cdot I$, изменяется по прямой линии (т.к. U_1 – постоянная величина)

$$КПД\,\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I^2 \cdot R_н}{I^2 \cdot (R_л + R_н)} = \frac{R_н}{R_л + R_н}$$

В режиме максимальной мощности на нагрузке $R_н$ КПД составляет $\eta = 0,5$, т.е. половина мощности расходуется на потери в линии.

КПД имеет максимальное значение в режиме, близком к ***ХХ***

При согласованной нагрузке, т.е. при $R_н = R_л$

$$U_н = U_2 = U_1 - I \cdot R_л =$$

$$= U_1 - \frac{U_1 \cdot R_л}{R_л \cdot R_н} = U_1\left(\frac{R_л + R_н - R_л}{R_л + R_н}\right) = \frac{U_1 \cdot R_н}{R_л + R_н} = U_1\left(\frac{R_н}{2R_н}\right) = 0{,}5U_1$$

4. Передача энергии по линии электропередачи (ЛЭП)

Если по линии передачи с сопротивлением $\boldsymbol{R_л}$ должна быть передана мощность $\boldsymbol{P_2}$, то **КПД** передачи будет тем выше, чем больше напряжение источника $\boldsymbol{U_1}$.

Действительно, снижение напряжения $\boldsymbol{U_1}$ приведет к снижению напряжения $\boldsymbol{U_2}$.

$$\downarrow R_н = \frac{\downarrow U_2^2}{P_2}$$

Снижение $\boldsymbol{R_н}$ при $\boldsymbol{R_л = const}$ приведет к уменьшению **КПД**

$$\eta = \frac{R_н}{R_л + R_н} = \downarrow \frac{1}{1 + \frac{R_л}{\downarrow R_н} \uparrow}$$

ВЫВОД: Передача эл. энергии осуществляется при высоком напряжении источника в режиме, близком к режиму холостого хода, т.е. при маленьком токе.

5. Баланс мощностей

Алгебраическая сумма мощностей всех источников энергии, равна арифметической сумме мощностей всех приемников энергии

$$\sum U_{ucm} \cdot I_{ucm} = \sum I_R^2 \cdot R \quad \text{или} \quad \boxed{\sum P_{ucm} = \sum P_R} \qquad \sum E_i \cdot I_i = \sum I_i^2 \cdot R_i$$

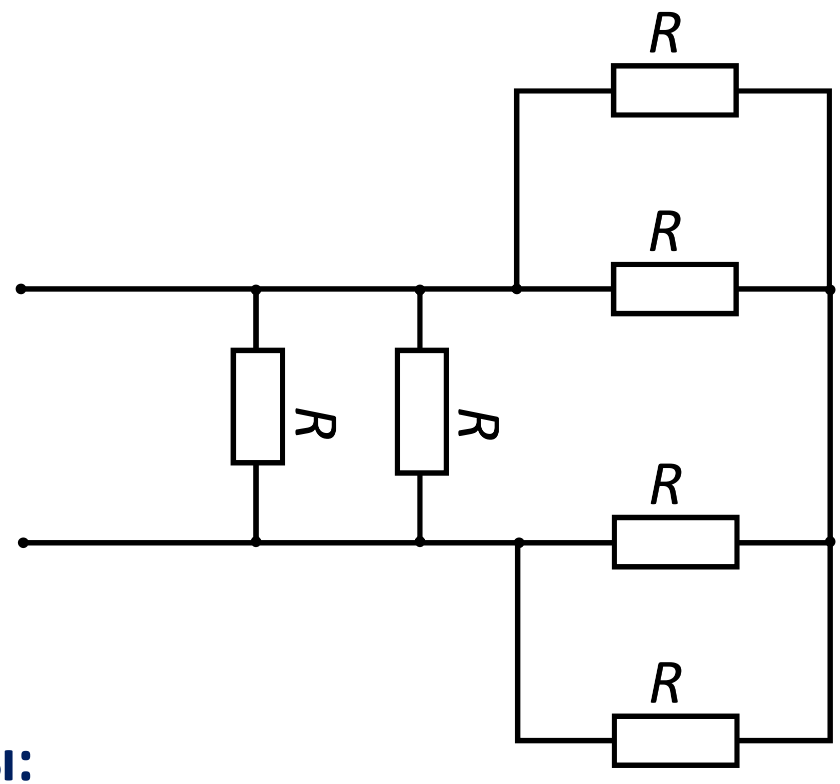
Мощность источника следует считать положительной, если положительное направление тока совпадает с направлением ЭДС, и наоборот (зарядка аккумулятора).

Если в схеме имеются ИТ, то нужно учесть и их мощность.

$$\boxed{\sum E_i \cdot I_i + \sum U_{ab} \cdot I_k = \sum I_i^2 \cdot R_i}$$

Проверь себя!

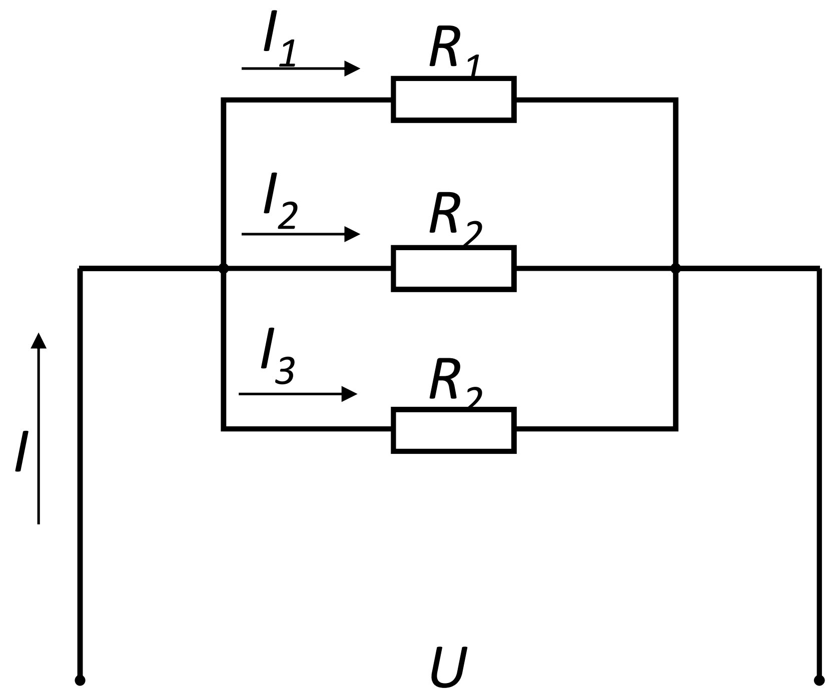
Вопрос 1 : Если сопротивления всех резисторов одинаковы и равны 6 Ом, то эквивалентное сопротивление пассивной резистивной цепи, изображенной на рисунке, равно…



Ответы:

а) 1,5 Ом б) 2 Ом в) 3 Ом г) 6 Ом

Вопрос 2 : В цепи известны сопротивления R_1=30 Ом,R_2=60 Ом,R_3=120 Ом и ток в первой ветви I_1=4 А. Тогда ток I и мощность P равны…



Ответы:

а) I = 9 А; P = 810 Вт
б) I = 8 А; P = 960 Вт
в) I = 7 А; P = 540 Вт
г) I = 7 А; P = 840 Вт

Вопрос 3 : Пять резисторов с сопротивлениями R_1=100 Ом, R_2=10 Ом, R_3=20 Ом, R_4=500 Ом, R_5= 30 Ом соединены параллельно. Наибольший ток будет наблюдаться…

Ответы:

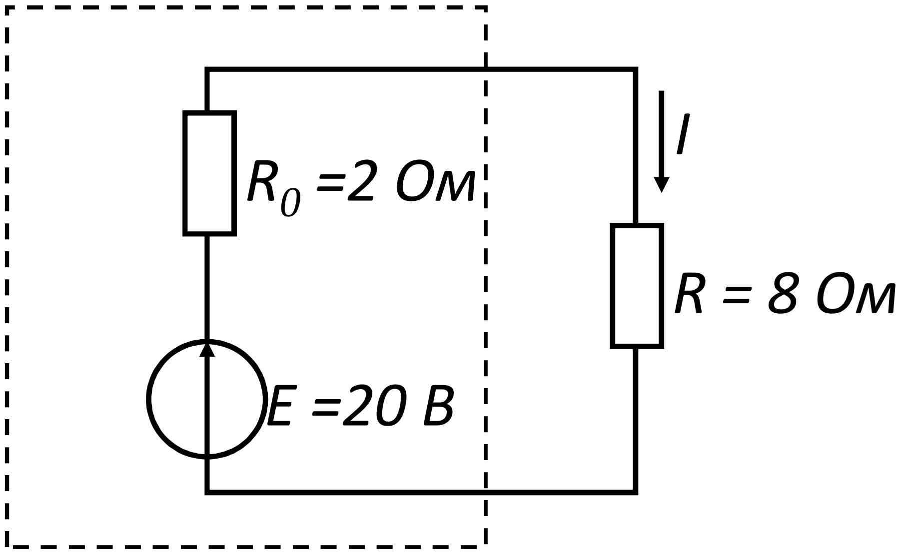
а) в R_2

б) в R_4

в) во всех один и тот же

г) в R_1 и R_5

Вопрос 4 : Мощность, выделяющаяся во внутреннем сопротивлении источника ЭДС $R_{0,}$ составит…



Ответы:

а) 8 Вт б) 30 Вт в) 32Вт г) 16Вт

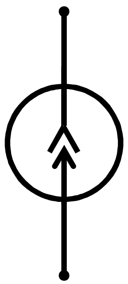
Проверь себя!

Лекция 5

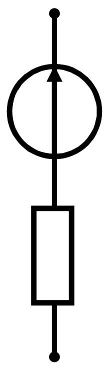
Вопрос 5 : Указать, какая из приведенных схем замещения относится к идеальному источнику ЭДС…

Ответы:

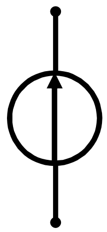
а)



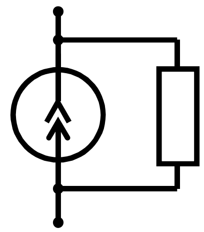
б)



в)



г)



Правильные ответы *Лекция 5*

1	2	3	4	5
б	г	а	а	в