Теоретические основы электротехники

Лекция 6
Синусоидальная ЭДС и её параметры. Представления синусоидальных величин вращающимися векторами и комплексными числами

преподаватель:
доцент кафедры электротехники, автоматики и метрологии, к.п.н. ***Елена Артуровна Вахтина***

ПЛАН

1. Получение синусоидальной ЭДС
2. Основные понятия и определения.
3. Среднее и действующее значение синусоидального тока, ЭДС, напряжения
4. Представление синусоидальных функций вращающимися векторами и комплексными числами

Переменный ток имеет огромное практическое значение:

- он легко *трансформируется* и передается на большие расстояния;
- электрические машины и другие электротехнические устройства, предназначенные для работы в цепях переменного тока, относительно простыи достаточно надежны в эксплуатации.
- Изменение тока по синусоидальному закону происходит плавно, без скачков, что благоприятно сказывается на работе электротехнических устройств.

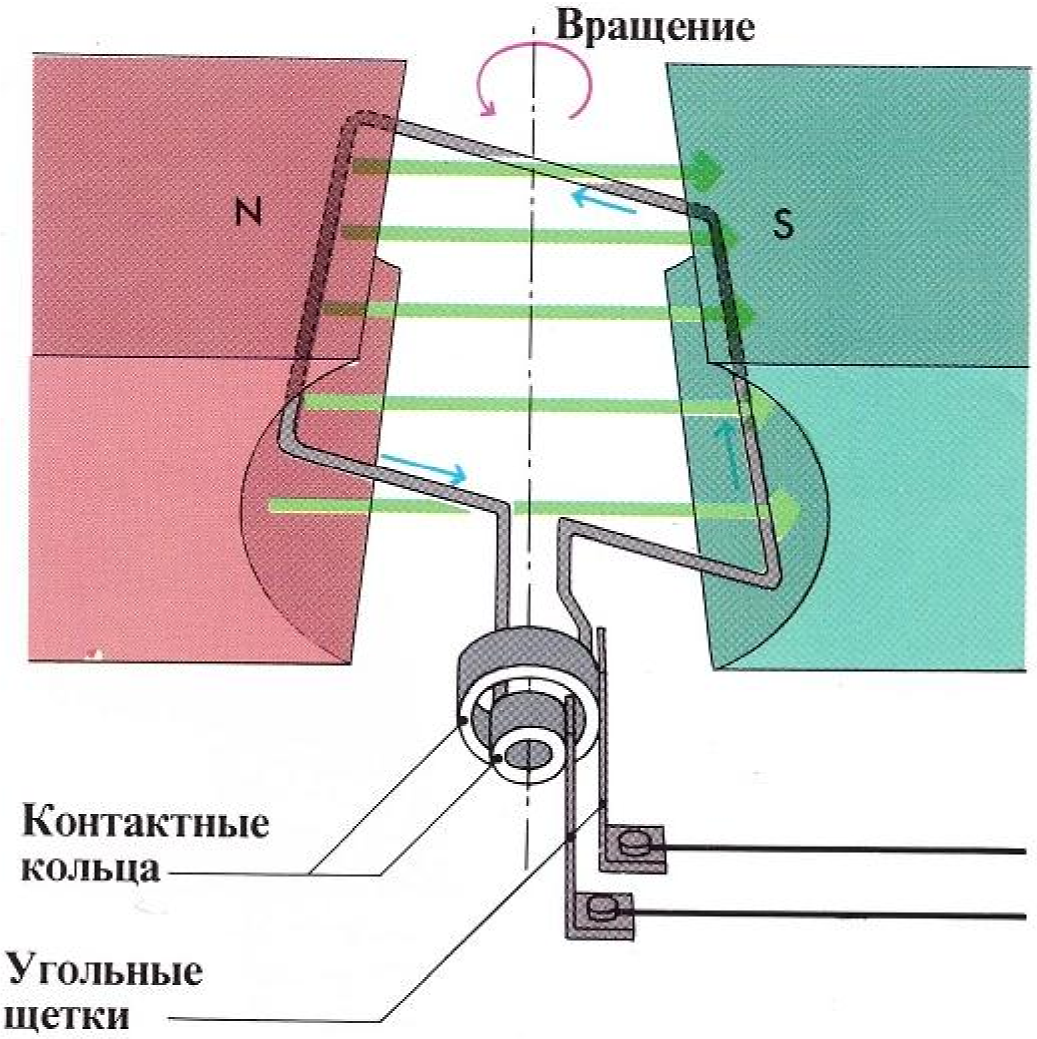
Лекция 6

1. Получение синусоидальной ЭДС

Переменный ток вырабатывается на электростанциях **синхронными генераторами**.

1. Получение синусоидальной ЭДС

Простейшая модель генератора синусоидальной ЭДС



Принцип работы генератора переменного тока основан на **законе электромагнитной индукции**

2. Основные понятия и определения

ЭДС/ток/напряжение считается синусоидальной, если ее величина изменяется по закону синуса, т.е.

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t \pm \phi_e)$$
$$i = I_m \cdot \sin(\omega t \pm \phi_i) \qquad (1)$$
$$u = U_m \cdot \sin(\omega t \pm \phi_u)$$

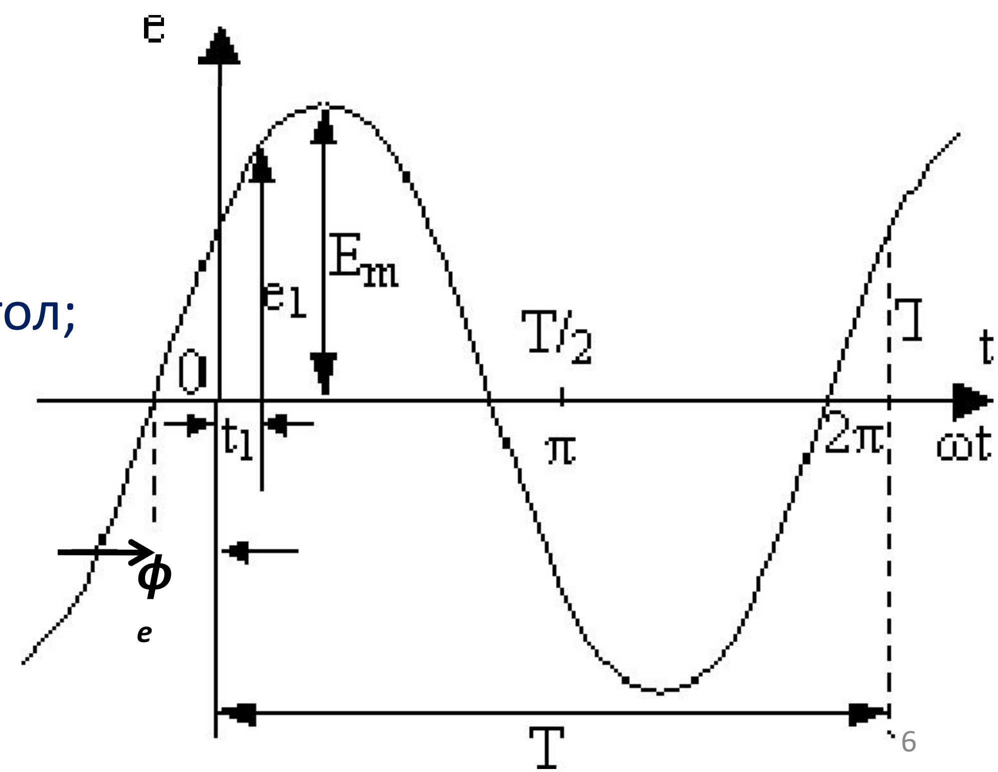
где ***e, i, u*** – **мгновенные** значения ЭДС/тока/ напряжения;

E_m, I_m, U_m – **амплитудные** значения ЭДС/тока/ напряжения;

(ωt + ϕ) – **фаза** или фазовый угол;

ω **– угловая частота**;

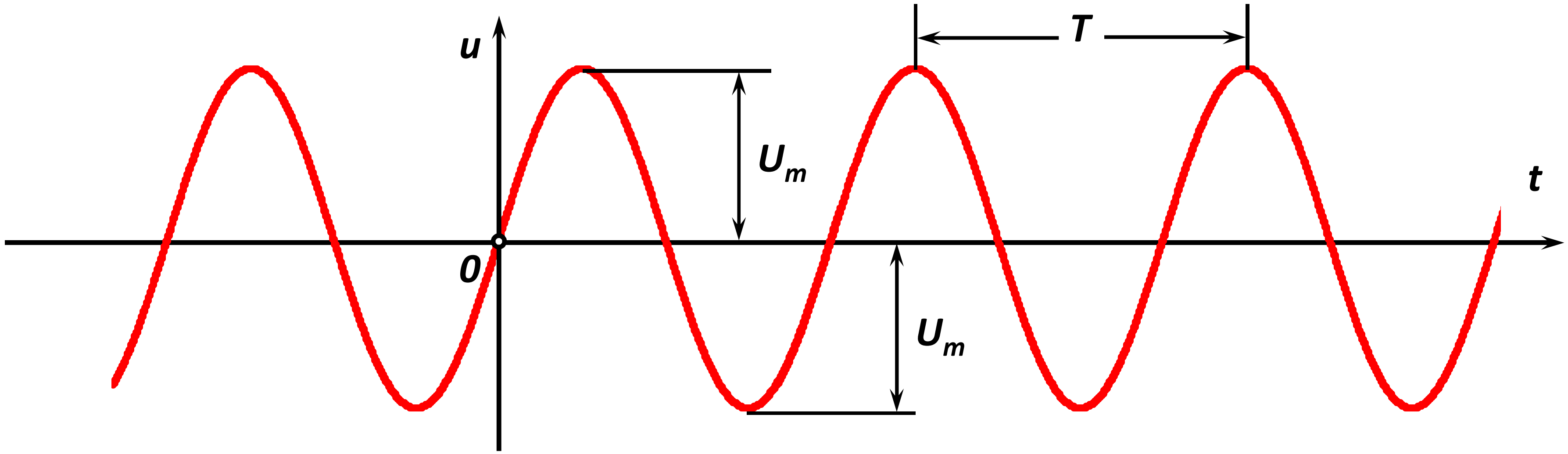
ϕ **– начальная фаза** при t=0



2. Основные понятия и определения

Значение синусоидальной функции в любой момент времени наз. **мгновенным** значением (***u, e, i***).

Осциллограмма напряжения/ЭДС/тока



- Максимальное значение ЭДС называется **амплитудой** U_m / E_m / I_m
- Интервал времени, в течении которого ЭДС/ток/напряжение совершает полный цикл своего изменения, называется **периодом** ***T*** [*c*].

2. Основные понятия и определения

- Величина, обратная периоду, называется **частотой** колебаний, т.е. частота равна числу колебаний в одну секунду.

$$f = \frac{1}{T} \quad [Гц]$$

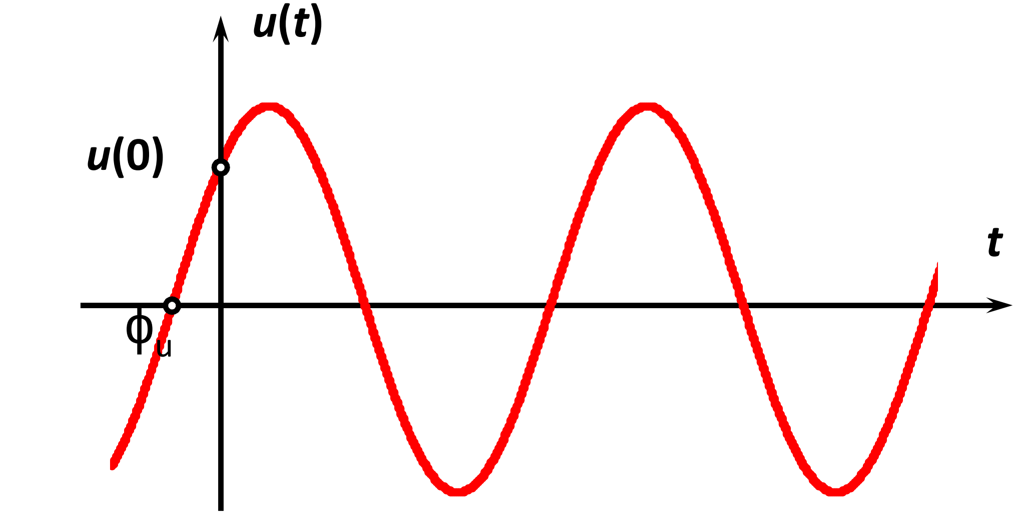
*В России и странах Европы промышленная частота – **50 Гц**.; в США – 60 Гц.*

- Величина, показывающая скорость изменения угла, называется **угловой частотой**:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \left[\frac{1}{сек}\right] = \left[\frac{рад}{сек}\right]$$

Например, для ***f=50*** Гц, ***ω=2·3,14·50= 314*** рад/с.
Напомним, что 1 рад = 57,3°при переводе радиан в градусы.

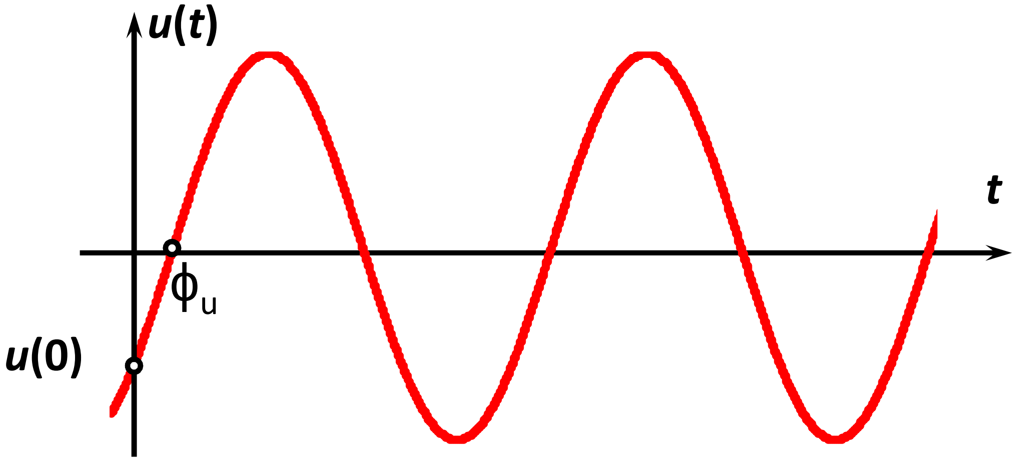
2. Основные понятия и определения



$$u(t) = U_m \sin(\mu t + \ddot{}_u)$$

$$u(0) = U_m \sin(\ddot{}_u)$$

$$\ddot{}_u > 0$$



$$u(t) = U_m \sin(\mu t - \ddot{}_u)$$

$$u(0) = U_m \sin(-\ddot{}_u)$$

$$\ddot{}_u < 0$$

Фаза ***(ωt + φ)*** характеризует <u>напряжение/ЭДС/ток</u> в данный момент времени, а начальная фаза ***φ* -** при ***t=0***

3. Среднее и действующее значение синусоидального тока/ ЭДС/ напряжения

При анализе и расчетах выпрямительных устройств пользуются средними значениями тока/ ЭДС/ напряжения.

➢ Под средним значением понимают среднее арифметическое значение соответствующей величины за полпериода.

$$I_{ср} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m \cdot \sin(\omega t)\cdot dt = \frac{2I_m}{T\cdot\omega}(-\cos\omega t)\Big|_0^{T/2} = \frac{2I_m}{\pi} = 0{,}638 I_m$$

$$\boxed{E_{ср} = 0{,}638\cdot Em \qquad U_{ср} = 0{,}638\cdot Um}$$

Для сравнения синусоидального и постоянного тока по тепловому воздействию вводят понятие действующего значения тока.

➢ Под действующим понимают такой постоянный ток, который выделяет в сопротивлении ***R*** за время ***T*** такое же количество тепла, что и данный синусоидальный ток.

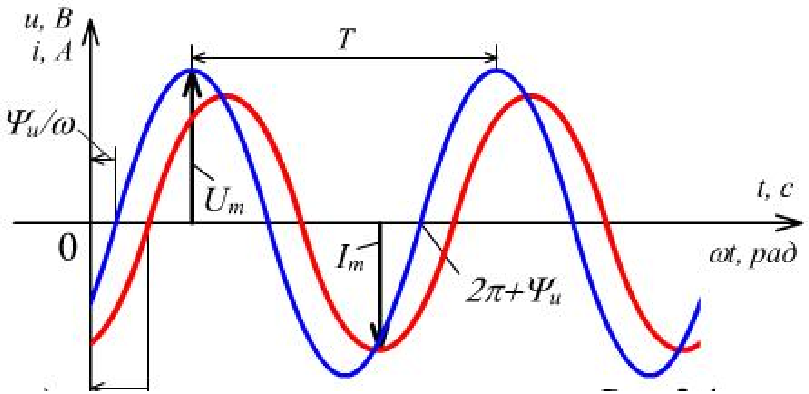
$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

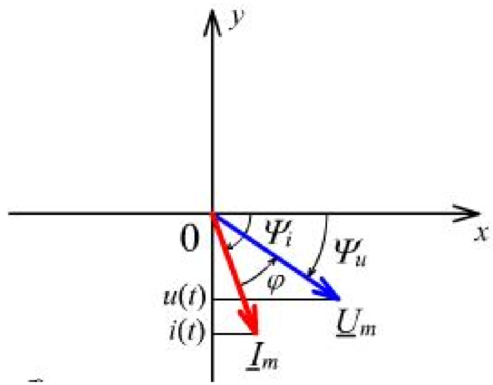
4. Способы представления синусоидальных функций

1. Аналитическое: ***e = E$_m$ ·sin(ωt ± φ$_e$) и т.п.***

Примечание: *Для расчета электрических цепей аналитические выражения синусоидальных величин неудобны, т. к. алгебраические действия (сложение, вычитание, умножение и т. д.) с тригонометрическими функциями приводят к громоздким вычислениям.*

2. Графическое – посредством временной или векторной диаграмм.

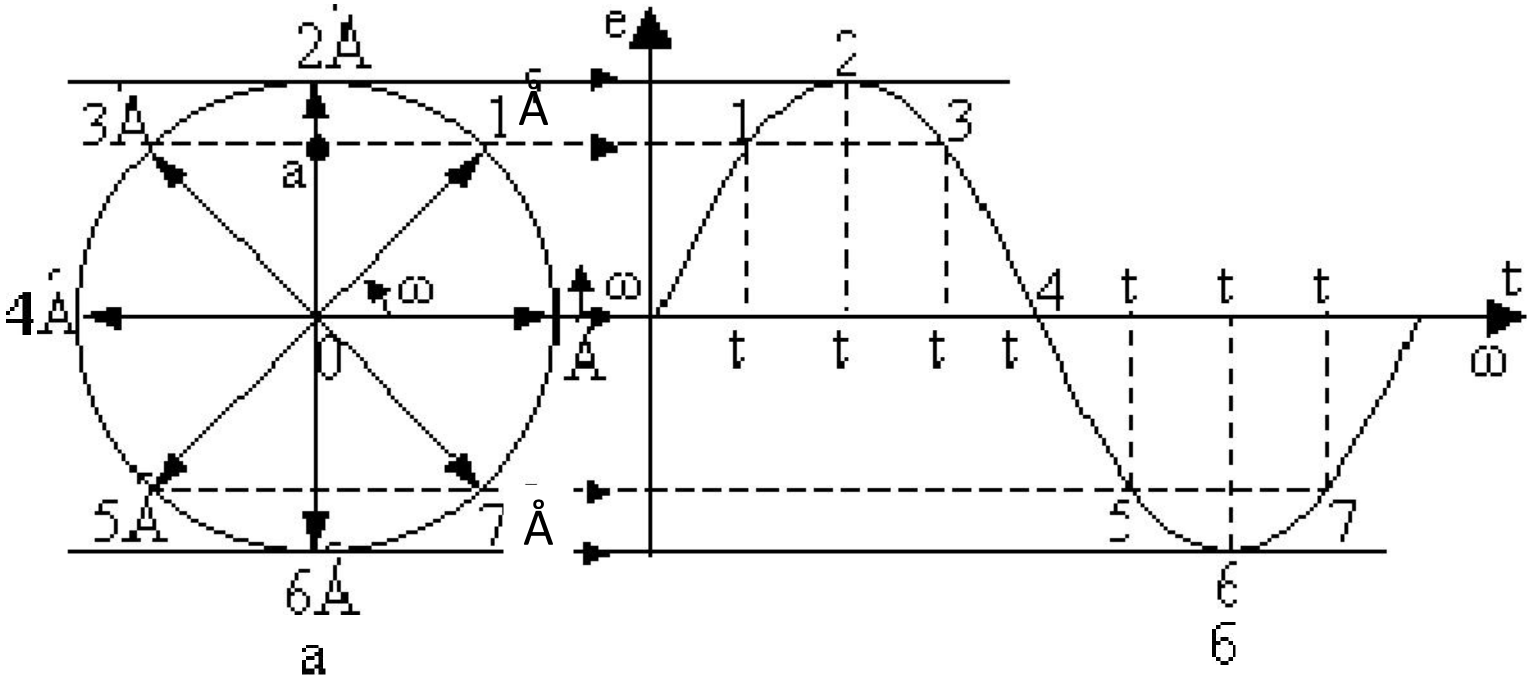




3. Комплексными функциями (числами)- векторы располагают на комплексной плоскости с осями координат: ***Re*** - ось действительных чисел и величин и ***Im*** - ось мнимых чисел и величин.

4. Представление синусоидальных функций вращающимися векторами

- Имеется радиус-вектор **ОА**, длина которого $\boldsymbol{A_m}$ = амплитуде $\boldsymbol{E_m}$ синусоидальной ЭДС $\underline{\boldsymbol{e = A_m \cdot \sin\omega t = E_m \cdot \sin\omega t.}}$
- Вектор вращается против часовой стрелки с частотой $\boldsymbol{\omega}$.
- Угол α = $\boldsymbol{\omega t}$ непрерывно изменяется, конец вектора **ОА** последовательно проходит точки (1, 2, … 7).



4. Представление синусоидальных функций вращающимися векторами

Лекция 6

- Любую синусоидальную величину можно представить с помощью вращающегося вектора для этого нужно знать: амплитуду E_m, начальный угол ϕ и угловую скорость ω.
- Использование векторов значительно упрощает вычисления.

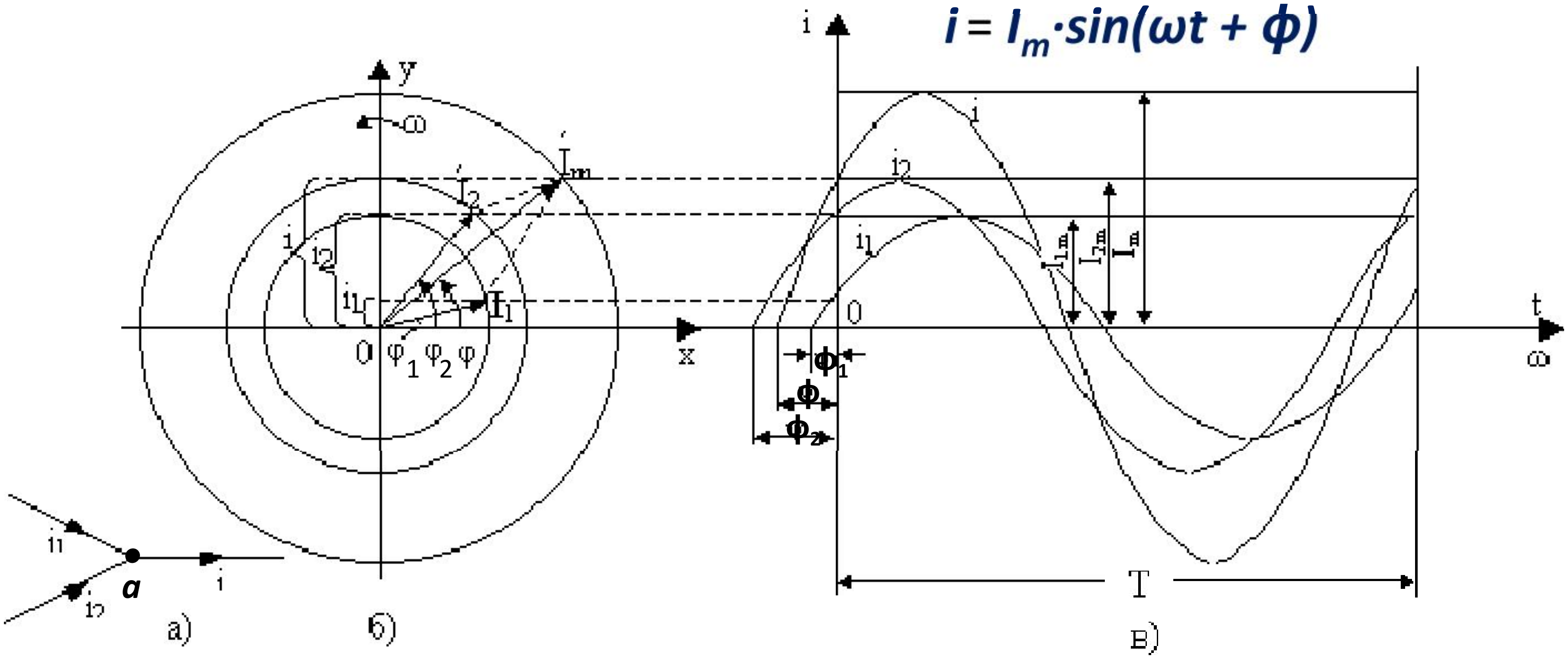
Например: к узлу «*a*» подтекают токи: $i_1 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$ и $i_2 = I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \phi_2)$
Определить общий ток *I*

На основании 1ЗК можно записать:

$$i = i_1 + i_2 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \phi_2)$$

4. Представление синусоидальных функций вращающимися векторами

Лекция 6



Обозначим вектора $\dot{I}_m$ или $\underline{I}_m$

- Сложив <u>векторы</u> $\underline{I}_{1m}$ и $\underline{I}_{2m}$ по правилу параллелограмма, получим амплитуду результирующего тока $\underline{I}_m$.
- Взаимное расположение векторов в любой момент времени t остается неизменным, т.к. они вращаются с постоянной угловой скоростью ω . Поэтому векторы изображаются для момента времени $t = 0$

4. Представление синусоидальных функций вращающимися векторами

В последовательной цепи переменного тока действуют 3 напряжения:

$u_1 = U_{1m} \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$

$u_2 = U_{2m} \cdot \sin(\omega t - \phi_2)$

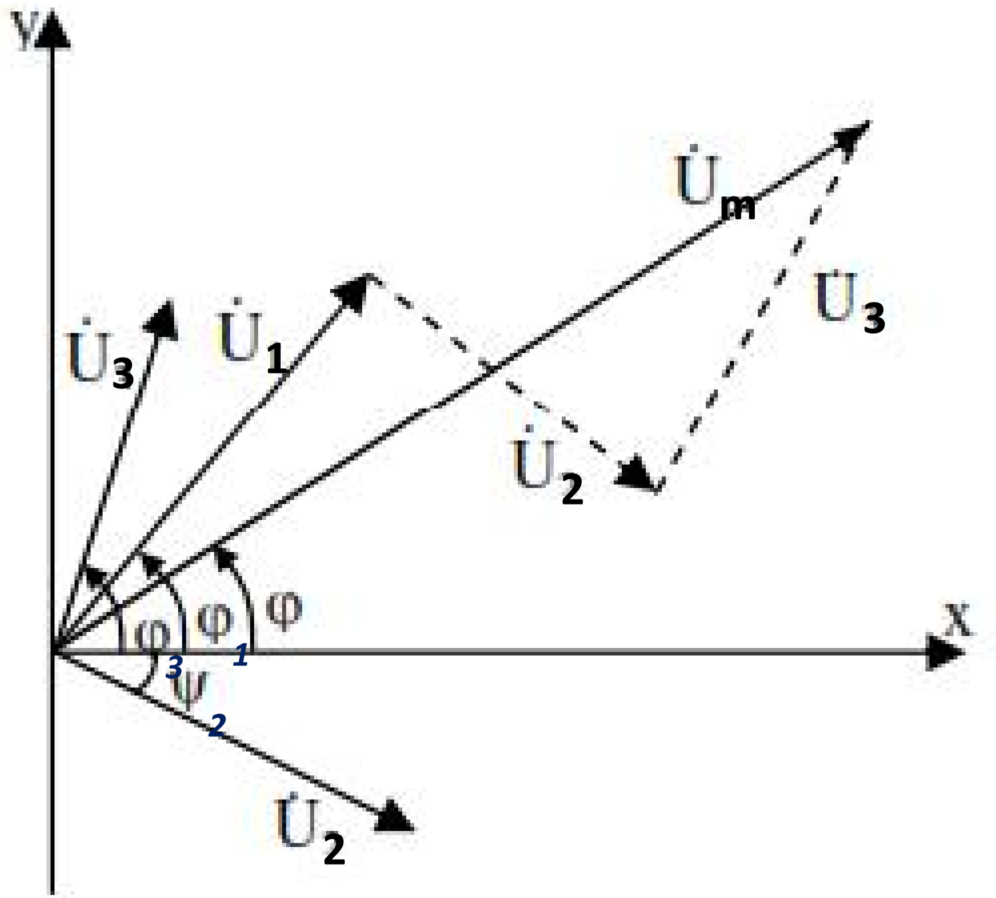
$u_3 = U_{3m} \cdot \sin(\omega t + \phi_3)$

Сумму напряжений:

$u = u_1 + u_2 + u_3$

находим сложением векторов их амплитуд:

$$\dot{U}_m = \dot{U}_{1m} + \dot{U}_{2m} + \dot{U}_{3m}$$



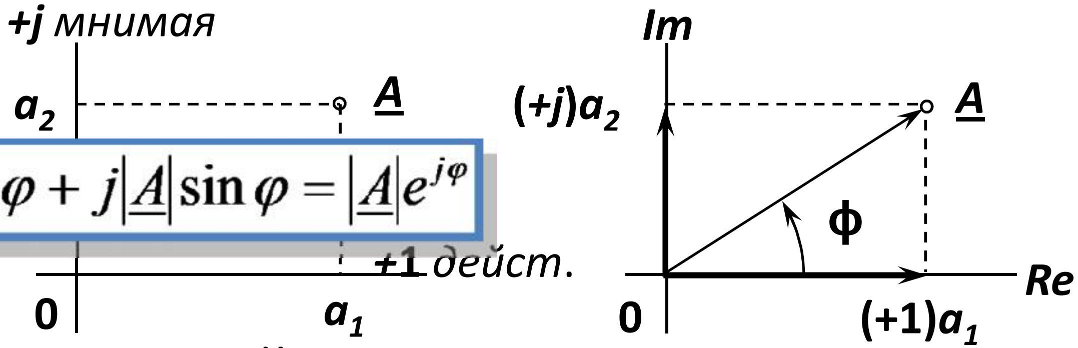
Совокупность векторов называют **векторной диаграммой**

4. Представление синусоидальных функций комплексными числами

Вектор и комплексное число понятия взаимосвязанные

$\underline{A} = a_1 + ja_2$

$$A = a_1 + ja_2 = |\underline{A}|\cos\varphi + j|\underline{A}|\sin\varphi = |\underline{A}|e^{j\varphi}$$



Комплексная плоскость

$$a_1 = |\underline{A}|\cos\varphi \qquad a_2 = |\underline{A}|\sin\varphi$$

$$|\underline{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \qquad a_1 > 0$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \pi \qquad a_1 < 0$$

Напомним, что $j = \sqrt{-1}$

4. Представление синусоидальных функций комплексными числами

$\underline{A} = a_1 + ja_2$

$$A = a_1 + ja_2 = |\underline{A}|\cos\varphi + j|\underline{A}|\sin\varphi = |\underline{A}|e^{j\varphi}$$

где $e^{j\omega t}$ - **оператор вращения**, имеющий модуль, равный единице, и аргумент ωt

$$i(t) = 0{,}545\sin(\mu t - 0.231)$$

$$\downarrow$$

$$\underline{I}_m = 0{,}545e^{-j0{,}231} = 0{,}545\cos(-0{,}231) + j0{,}545\sin(-0{,}231) = 0{,}531 - j0{,}125\text{ ,(A)}$$

$$u(t) = 11{,}5\sin(\mu t + 0{,}716)$$

$$\downarrow$$

$$\underline{U}_m = 11{,}5e^{j0{,}716} = 11{,}5\cos(0{,}716) + j11{,}5\sin(0{,}716) = 8{,}68 + j7{,}55\text{,(B)}$$

4. Три формы представления комплексных чисел:

1) $\underline{A} = a + jb$ - алгебраическая,
2) $\underline{A} = A \cdot e^{j\phi}$ - показательная,
3) $\underline{A} = A \cdot (\cos \phi + j \cdot \sin\phi)$ - тригонометрическая формы

где $|\underline{A}| = \sqrt{a^2 + в^2}$ - модуль комплексного числа $\underline{A}$;

¨ $= arctg\left(\frac{в}{a}\right)$ - аргумент комплексного числа $\underline{A}$;

$a = Re[\underline{A}]$ - действительная часть;
$b = Im[\underline{A}]$ - мнимая часть комплексного числа $\underline{A}$.
Если модуль $|A| = 1$, то получим формулу Эйлера:

оператор поворота ⟶ $e^{\pm j¨} = \cos ¨ \pm j \cdot \sin ¨$

$$\dot{A}_m = A_m \ell^{j(\omega t + \varphi)} = A_m\left[(\cos \omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi)\right] =$$
$$= A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot A_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

4. Переход от временной функции к комплексной. Переход, от одной формы записи к другой. Действия с комплексными числами

$$I_m \sin(\omega t + \varphi) = i(t)$$

$$\dot{I}_m = I_m \ell^{j(\omega t+\varphi)} = I_m \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Обычно комплексные амплитуды записываются для момента времени t=0

$$\dot{I}_m = I_m \ell^{j\varphi} = I_m \cos\varphi + j \cdot I_m \sin\varphi$$

Сложение $\dot{A} + \dot{B} = (a_1 + ja_2) + (b_1 + jb_2) = (a_1 + b_1) + j \cdot (a_2 + b_2)$

Вычитание $\dot{A} - \dot{B} = (a_1 + ja_2) - (b_1 + jb_2) = (a_1 - b_1) + j \cdot (a_2 - b_2)$

Умножение $\dot{A} \cdot \dot{B} = A\ell^{j\alpha} \cdot B\ell^{j\beta} = A \cdot B \cdot \ell^{j(\alpha+\beta)}$

Деление $\dot{A}/\dot{B} = \dfrac{A\ell^{j\alpha}}{B\ell^{j\beta}} = A/B \cdot \ell^{j(\alpha-\beta)}$

4. Примеры

$$\underline{C} = -3 + j4 = \sqrt{3^2 + 4^2}\, e^{-j(\mathrm{arctg}\, 4/3 - \pi)} = 5e^{j137^\circ};$$

$$\underline{C} = -4 - j3 = \sqrt{4^2 + 3^2}\, e^{j(\mathrm{arctg}\, 3/4 - \pi)} = 5e^{-j143^\circ}.$$

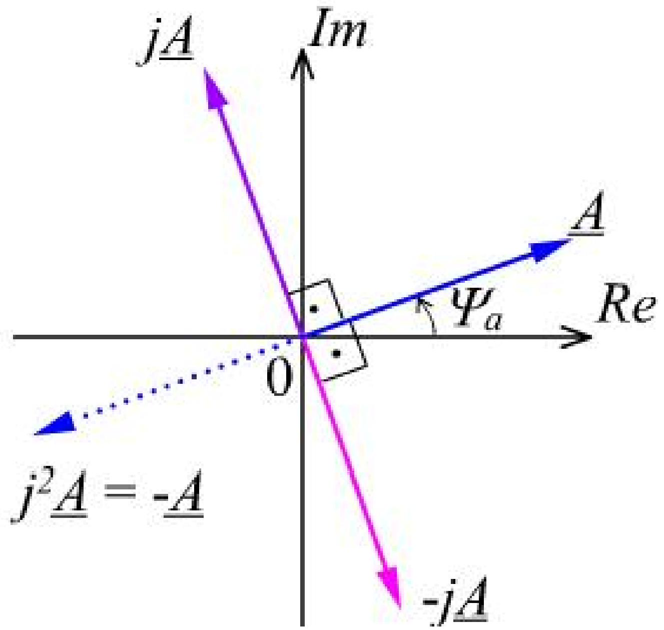
Ток $i = 8\sin(\omega t + 20^0)A$. Записать выражение комплексной амплитуды этого тока. В данном случае $I_m = 8A$., $\varphi = 20^0$. Следовательно, $\dot{I}_m = 8\ell^{+j20^0}$

Пример 2. Комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m = 25\ell^{-j30^0}$ А. Записать выражение для мгновенного значения тока.

Решение. Для перехода к мгновенному значению надо умножить $\dot{I}_m$ на $\ell^{j\omega t}$ и взять коэффициент при мнимой части от полученного произведения

$$i = 25\sin(\omega t - 30^0)$$

4. Умножение комплексного числа А на *j*

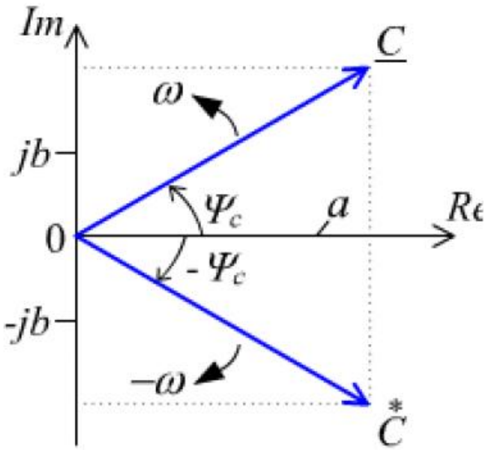


- равнозначно повороту вектора ***A*** на угол ***π/2*** в положительном направлении (против часовой стрелки)

j = e^{jπ/2} - оператор поворота на угол ***π/2***,

- а умножение вектора ***A*** на оператор ***–j = e^{–jπ/2}*** равносильно его повороту на угол ***–π/2*** по ходу часовой стрелки (см. рис).
- Умножение вектора ***A*** на оператор **j² = -1**, равносильно его повороту на угол ***±π***. Вектор ***–A = Ae^{±jπ}*** имеет направление, противоположное направлению вектора ***A.***

4. Комплексно-сопряженные числа



- Если комплексная величина отличается от комплекса $\underline{C}$ только знаком мнимой части, то она называется **сопряженным комплексом** (зеркальное отображение вектора $\underline{C}$ относительно оси действительных чисел *Re*).
- Итак, если

$\underline{C} = Ce^{j\Psi c} = C\cdot(\cos\Psi c + j\sin\Psi c) = a + jb$, то

$$\underline{\overset{*}{C}} = Ce^{-j\Psi c} = C\,(\cos\Psi_c - j\sin\Psi_c) = a - jb.$$