Теоретические основы электротехники

Лекция 8
Законы Кирхгофа в комплексной (символической) форме. Комплексный метод расчета электрических цепей

преподаватель:
доцент кафедры электротехники, автоматики и метрологии, к.п.н. ***Елена Артуровна Вахтина***

ПЛАН

1. Законы Кирхгофа в комплексной (символической) форме.
2. Комплексный метод расчета электрических цепей.
3. Топографические (потенциальные) диаграммы.
4. Изображение разности потенциалов на комплексной плоскости.

Вопросы самоконтроля:

1) Сформулируйте и запишите формулы:
 - закон Ома для участка цепи «без» и «с» ЭДС;
 - первый и второй закон Кирхгофа.

2) Каков алгоритм использования законов Кирхгофа для расчета эл. цепи?

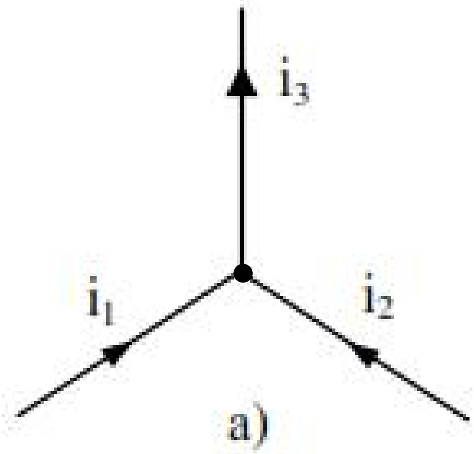
1. Законы Кирхгофа в комплексной (символической) форме

Математическое выражение законов зависит от вида представления синусоидальной величины:

1. Тригонометрической функцией, т.е. мгновенными значениями соответствующих синусоидальных величин для любого момента времени.
2. Комплексным числом, т.е. комплексными значениями соответствующих величин, т.е. для момента времени ***t=0*** .

1. Первый закон Кирхгофа (1ЗК)

Тригонометрическая форма



Алгебраическая сумма мгновенных значений тока в любом узле электрической цепи в любой момент времени равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0, \quad т.е. \quad \sum_{k=1}^{n} I_{mk} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{ik}) = 0 \qquad (1)$$

За положительные (**+**) приняты направления токов к узлу и наоборот от узла (**–**).

Пусть имеются три тока (рис. а) $i_1 = I_{m1} \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$

$i_2 = I_{m2} \cdot \sin(\omega t + \phi_2)$

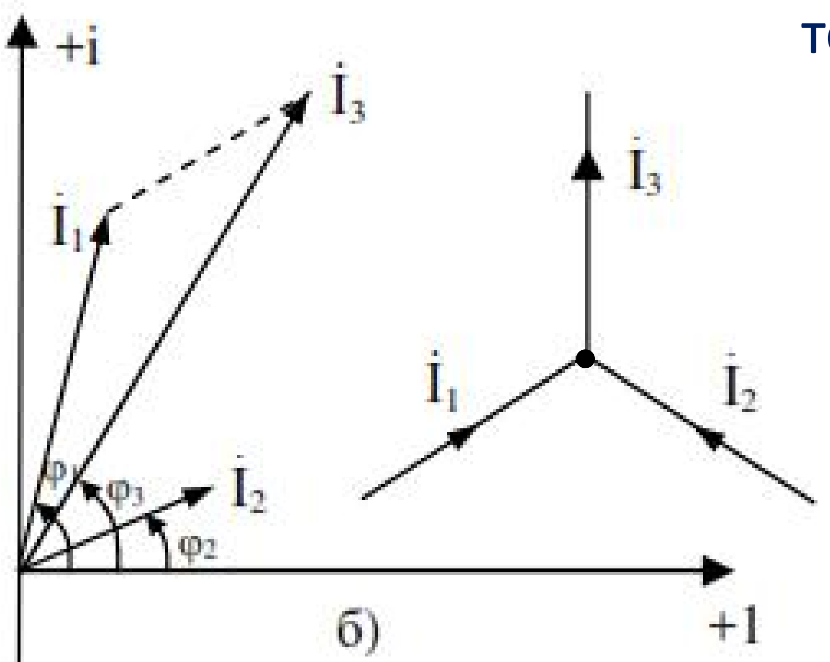
$i_3 = I_{m3} \cdot \sin(\omega t + \phi_3)$

Тогда 1ЗК $$\sum_{k=1}^{3} i_k = i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$I_{m1} \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + I_{m2} \cdot \sin(\omega t + \phi_2) - I_{m3} \cdot \sin(\omega t + \phi_3) = 0$$

1. Первый закон Кирхгофа (1ЗК)

Комплексная форма



векторная диаграмма трех токов

Представим все синусоидальные токи комплексами:

$$\dot{I}_k = I_k \cdot e^{j\psi_{ik}}$$

Тогда 1ЗК $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0}$

алгебраическая сумма комплексных значений токов всех ветвей, сходящихся в каком-либо узле, равна нулю

$$\sum_{k=1}^{3} \dot{I}_k = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3 \quad \text{или} \quad \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$$

Число независимых уравнений, записанных по 1ЗК, на одно уравнение меньше числа узлов *У* схемы: $\boldsymbol{N_{1ЗК} = У - 1}$.

1. Второй закон Кирхгофа (2ЗК)

Тригонометрическая форма форма

Алгебраическая сумма напряжений на пассивных элементах в любом замкнутом контуре в каждый момент времени равна алгебраической сумме ЭДС этого контура

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} e_k} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} U_{mk} \cdot \sin(\mu t + \cdot_{uk}) = \sum_{k=1}^{n} E_{mk} \cdot \sin(\mu t + \cdot_{ek})}$$

Комплексная форма

Представим все синусоидальные напряжения и ЭДС комплексами

$$\dot{U}_k = U_k \cdot e^{j \cdot_{uk}} \quad \dot{E} = E_k \cdot e^{j \cdot_{ek}} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k = \sum_{k=1}^{m} \dot{E}_k}$$

<u>Алгебраическая </u>сумма комплексных напряжений на всех элементах контура равна алгебраической сумме комплексов всех ЭДС в этом контуре

1. Второй закон Кирхгофа (2ЗК)

Лекция 8

Замечания

- *ЭДС* источников и *напряжения (токи)* на пассивных элементах контура записывают со знаком **+**, если их направления совпадают с направлением обхода контура.
- Число независимых уравнений, записанных по **2ЗК**, равно числу независимых контуров:

$$N_{\mathbf{2ЗК}} = В - (У - 1),$$

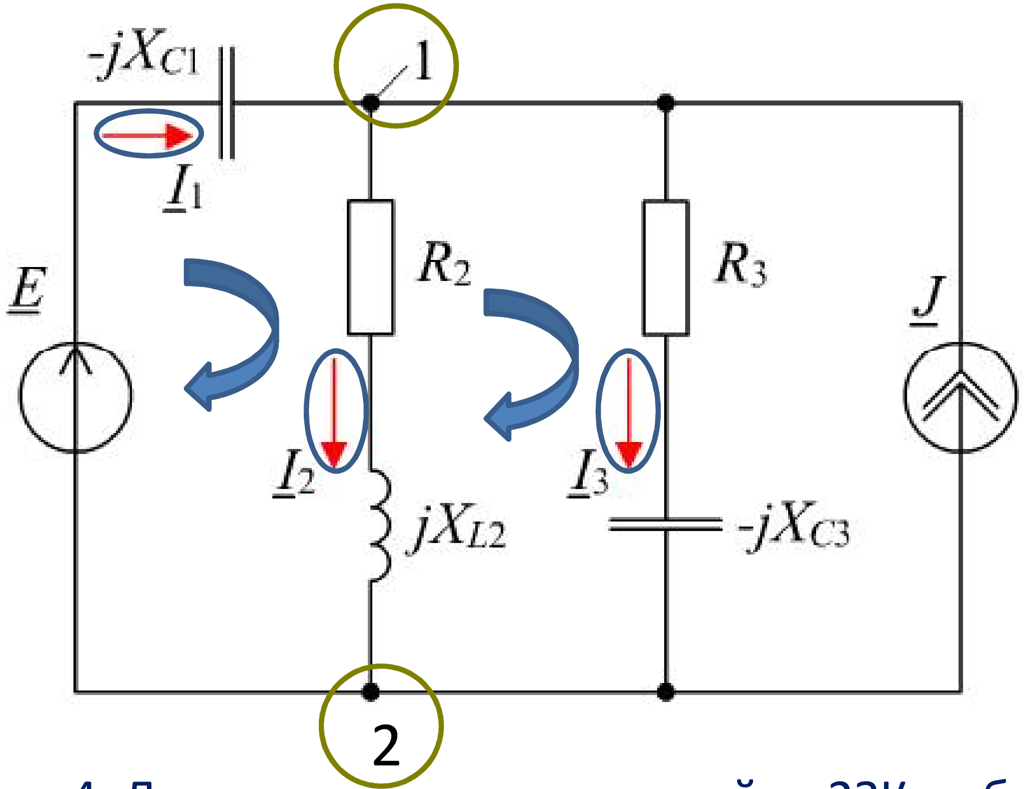
*где **В** - число ветвей с независимыми токами (без ветвей с источниками тока); **У** - число узлов схемы цепи***.**

- Действительные направления токов и напряжений периодически изменяются, поэтому произвольность выбора условных положительных направлений отражается только на их фазах.
- При изменении выбранного положительного направления на противоположное получается новое значение фазы, отличающееся на $\boldsymbol{\pi}$, что соответствует изменению знака комплексного тока/напряжения и изменению направлению вектора на диаграмме на **180°**.

1. Законы Кирхгофа в комплексной форме

ПРИМЕР:

Составить необходимое число уравнений методом законов Кирхгофа относительно неизвестных комплексов тока: $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ и $\underline{I}_3$



Решение

1. Произвольно выбираем направления комплексов тока и обозначаем их на схеме.

2. Определяем число узлов и ветвей с неизвестными токами: ***У***=2, ***В***=3.

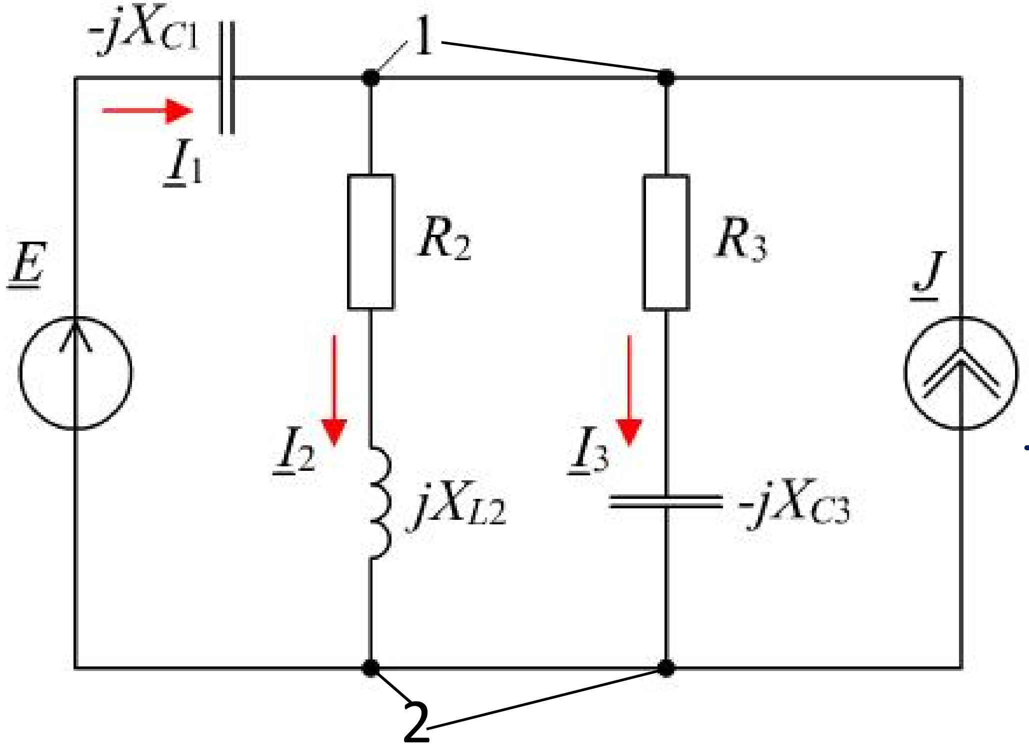
3. Запишем уравнение 1ЗК для узла 1

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{J} = 0 \qquad (1)$$

4. Для составления уравнений по2ЗК выбираем направления обхода 2х независимых контуров: левого и среднего по часовой стрелке. Ветвь с ИТ $\underline{J}$ по 2ЗК не учитывается

$$\underline{E} = -jX_{C1}\underline{I}_1 + (R_2 + jX_{L2})\underline{I}_2; \quad 0 = -(R_2 + jX_{L2})\underline{I}_2 + (R_3 - jX_{C3})\underline{I}_3 \qquad (2)$$

1. Законы Кирхгофа в комплексной форме



5. Решаем совместно систему из трех уравнений (1) и (2) с тремя неизвестными $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ и $\underline{I}_3$:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{J} = 0 \\ \underline{E} = -jX_{C1}\underline{I}_1 + (R_2 + jX_{L2})\underline{I}_2; \\ 0 = -(R_2 + jX_{L2})\underline{I}_2 + (R_3 - jX_{C3})\underline{I}_3. \end{cases}$$

определяем их комплексные значения:

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\psi_1} \qquad \underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\psi_2} \qquad \underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j\psi_3}$$

6. По найденным комплексам записываем соответствующие им мгновенные значения: $i_1 = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$,

$$i_2 = \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2),$$

$$i_3 = \sqrt{2} \cdot I_3 \cdot \sin(\omega t + \phi_3).$$

2. Комплексный метод расчета электрических цепей

- **Применяется** для расчёта сложных электрических цепей синусоидального тока в ***установившихся*** режимах работы.
- Сущность комплексного метода расчёта заключается в следующем:

a) путём функционального преобразования осуществляют переход от временных (синусоидальных) функций к комплексным, что позволяет заменить решение системы ***дифференциальных*** уравнений решением соответствующей системы ***алгебраических*** уравнений, составленных относительно комплексов функций;

b) посредством обратного перехода от комплексов к синусоидальным функциям получают выражения синусоидальных функций тока, напряжения и т. д.

2. Преимущества комплексного метода

1) Упрощает расчёт электрических цепей гармонического тока сложной конфигурации;
2) рассмотренные ранее методы расчёта цепей постоянного тока применимы к расчёту цепей синусоидального тока комплексным методом;
3) посредством комплексного метода рассчитывают частотные зависимости (характеристики) электрических величин.

2. Комплексный метод расчета электрических цепей

- **Пассивный элемент** электрической цепи характеризуется своим ***комплексным сопротивлением*** комплексным числом $\underline{Z}_э$, равным отношению комплексного напряжения на зажимах данного элемента к комплексному току этого элемента при ***t=0***:

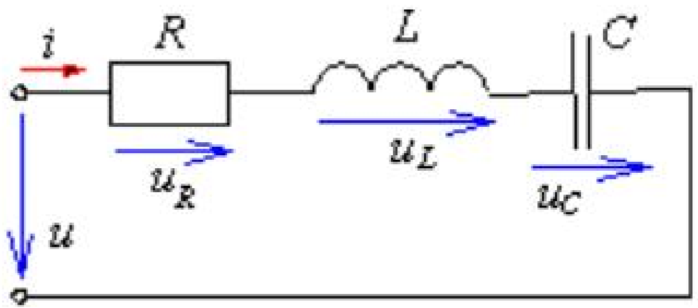
$$\underline{Z}_э = Z_э e^{j\varphi} \qquad \underline{Z}_Э = \frac{\dot{U}_Э}{\dot{I}_Э}, \text{ [Ом]}$$

2. Комплексный метод расчета электрических цепей

Дана последовательная RLC-цепь, к зажимам которой приложено

$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \Psi_u)$.

Найти комплексные сопротивления и ток.



1. Вычертим комплексную схему замещения цепи

2. Уравнение по 2ЗК для мгновенных значений:

$$u_R + u_L + u_C = u \qquad \text{или}$$

$$i \cdot R + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i dt = U_m \cdot \sin(\omega t + \Psi_u) \qquad (3)$$

2. Комплексный метод расчета электрических цепей

Лекция 8

3. Заменим мгновенные значения на комплексы:

$$i \cdot R \leftrightarrow \dot{I}_m \cdot R \qquad L\frac{di}{dt} \leftrightarrow \dot{I}_m \cdot j\mu L$$

$$\frac{1}{C}\int i dt \leftrightarrow \dot{I}_m \cdot \left(-\frac{j}{\mu C}\right) \qquad u \leftrightarrow U_m \cdot e^{j \cdot u}$$

4. Подставим комплексы в (3) комплексы:

$$\dot{I}_m \cdot R + \dot{I}_m \cdot j\mu L + \dot{I}_m \cdot \left(-\frac{j}{\mu C}\right) = U_m \cdot e^{j \cdot u} \qquad (4)$$

5. Выразим из (4) комплекс амплитуды тока:

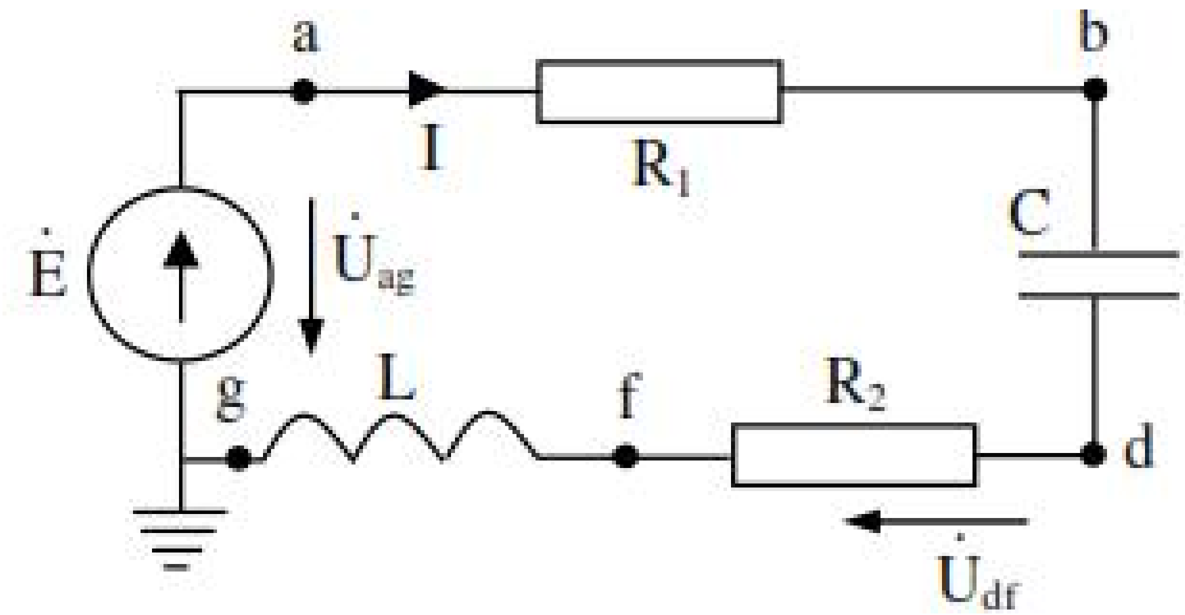
$$\dot{I}_m = \frac{U_m \cdot e^{j \cdot u}}{R + j\mu L - \dfrac{j}{\mu C}} = \frac{\dot{U}_m}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}} = I_m \cdot e^{j \cdot i} \qquad (5)$$

6. Зная $\dot{I}_m$ можно записать выражение для мгновенного значения: $\boldsymbol{i = I_m \cdot \sin(\omega t + \Psi_i)}$

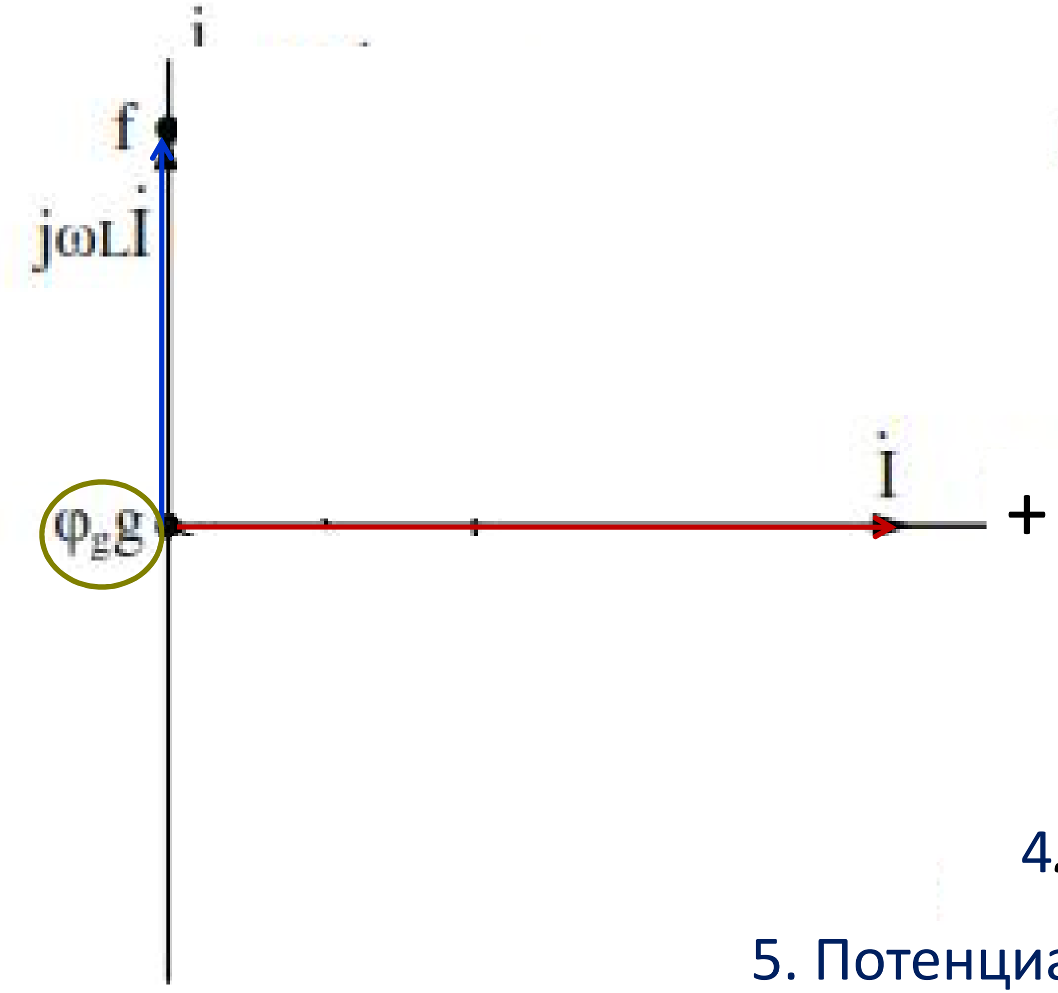
3. Топографические (потенциальные) диаграммы

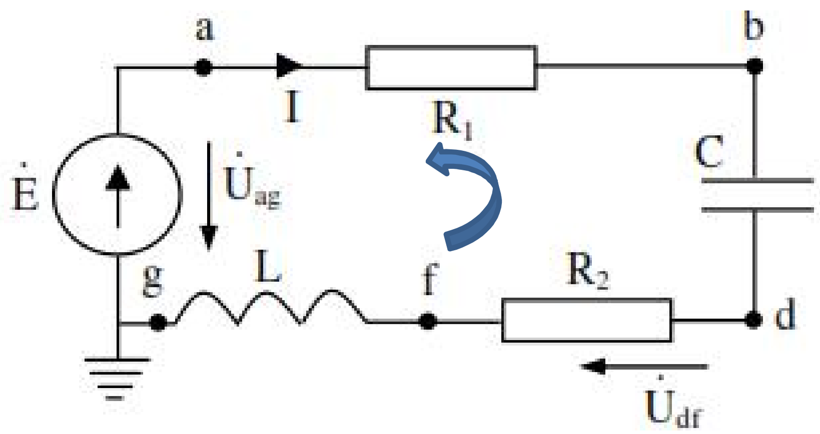
- Они представляют собой совокупность комплексных потенциалов, причем каждой точке эл. схемы соответствует определенная точка на топографической диаграмме.
- Точке отчета, потенциал которой равен нулю, на топографической диаграмме соответствует начало координат.

Задание: Построить качественно топографическую диаграмму потенциалов для схемы



3. Топографические диаграммы (ТД)





1. Отложим вектор тока по оси вещественных чисел.
2. Примем потенциал ϕ_g =0.
3. Обходим схему навстречу направлению тока.
4. Потенциал точки (**f**) $\phi_f = j\omega L\dot{I}$
5. Потенциал точки (**d**) $\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_f + \dot{I} \cdot R_2$
6. Потенциал точки (**b**) $\ddot{}_b = \ddot{}_d - \frac{jI}{\mu C}$,точки (**a**) $\ddot{}_a = \ddot{}_b + \dot{I} \cdot R1$

3. Топографические диаграммы (ТД)

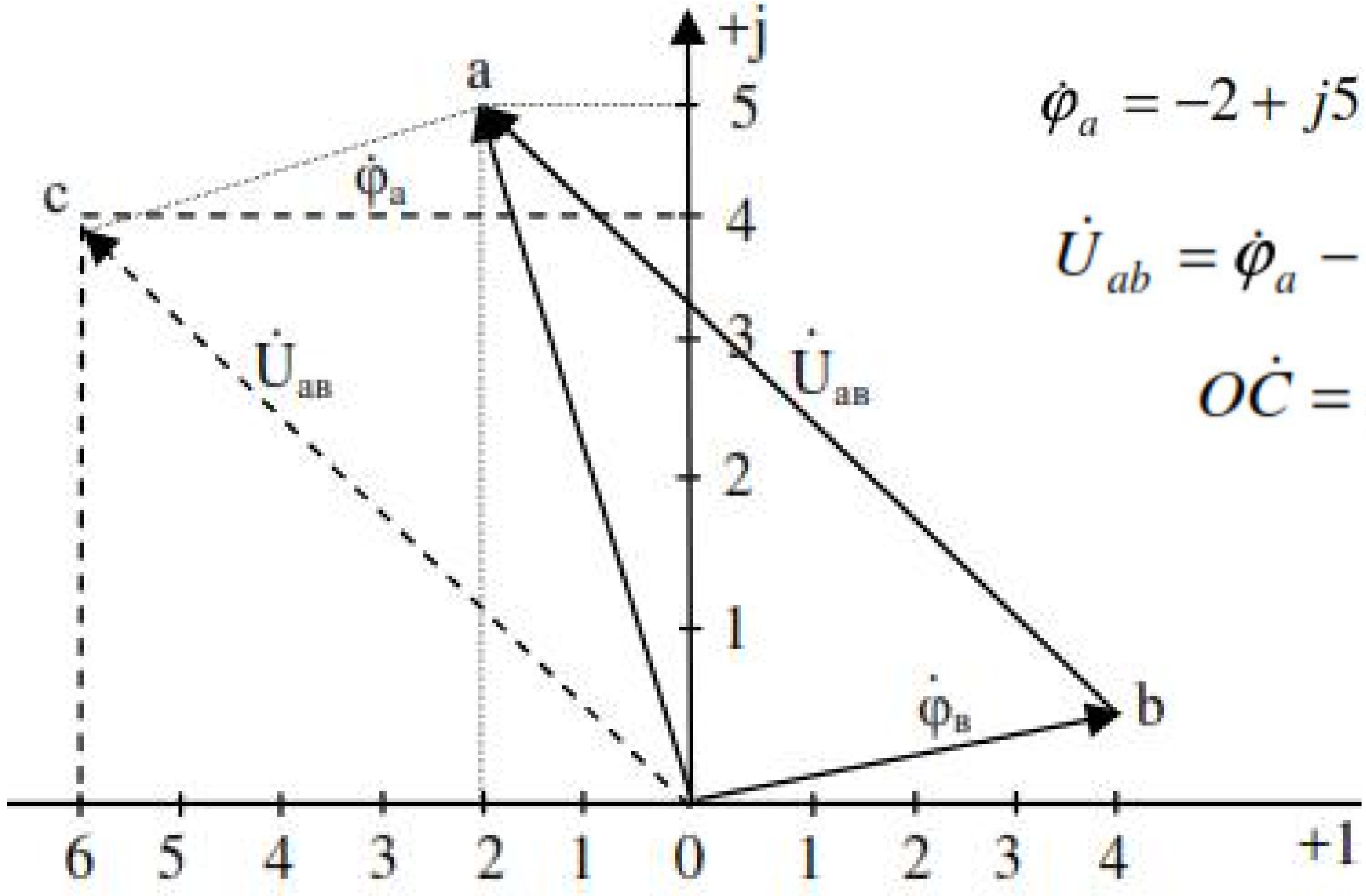
ВНИМАНИЕ

- Векторы напряжений направлены относительно точек ТД противоположно положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек схемы.

- На ТД можно не указывать направление векторов напряжений, а ограничиться только обозначением точек.

- Вектор ЭДС направлен относительно точек ТД одинаково с положительными направлениями ЭДС относительно соответствующих точек схемы.

4. Изображение разности потенциалов на комплексной плоскости



$$\dot{\varphi}_a = -2 + j5 \qquad \dot{\varphi}_b = 4 + j1$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = -6 + j4.$$

$$O\dot{C} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b.$$

Мощности

Символический метод применим также и в отношении мощностей, но не применим в отношении энергий!

$$\boxed{\underline{S} = P + jQ}$$

,

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{U}_m \overset{*}{\underline{I}}_m\right) = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\sim_u - \sim_i) = \frac{U_m I_m}{2}\cos\ddot{} = UI\cos\ddot{}$$

$$\overset{*}{\underline{I}}_k = I_k e^{-j\sim_{ik}}$$

$$\boxed{P = UI\cos\varphi}$$

,

$$Q = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\underline{U}_m \overset{*}{\underline{I}}_m\right) = \frac{U_m I_m}{2}\sin(\sim_u - \sim_i) = \frac{U_m I_m}{2}\sin\ddot{} = UI\sin\ddot{}$$

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\left|\underline{U}_m \overset{*}{\underline{I}}_m\right| = UI}$$

Мощности пассивных участков цепи

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2 = R I^2 \qquad \boxed{P = RI^2}$$

$$Q = \frac{1}{2} X I_m^2 = \frac{1}{2}(x_L - x_C) I_m^2 = \frac{1}{2}\left(\mu L - \frac{1}{\mu C}\right) I_m^2 = \left(\mu L - \frac{1}{\mu C}\right) I^2$$

$$\boxed{Q = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I^2}$$

$$S = \frac{1}{2} Z I_m^2 = Z I^2 \qquad \boxed{S = ZI^2}$$

Баланс мощностей

$$\sum_{k=1}^{в} \underline{U}_k \underline{I}_k^* = 0$$

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} - \underline{E}$$

$$\underline{I}_k \underline{I}_k^* = I_k^2$$

$$\sum_{k=1}^{в} \underline{Z}_k I_{mk}^2 = \sum_{k=1}^{в} \underline{E}_{mk} \underline{I}_{mk}^*$$

$$\underline{Z}_k = R_k + j\left(\mu L_k - \frac{1}{\mu C_k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{в} \left[R_k + j\left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}\right)\right] I_k^2 = \sum_{k=1}^{в} \underline{E}_k \underline{I}_k^*$$

$$\sum_{k=1}^{в} P_k + j\sum_{k=1}^{в} Q_k = \sum_{k=1}^{в} \underline{E}_k \underline{I}_k^*$$

$$\sum_{k=1}^{в} \underline{S}_{np} = \sum_{k=1}^{в} \underline{S}_{ucm}$$