Теоретические основы электротехники

Лекция 7
Анализ активного, индуктивного и емкостного элементов в цепи синусоидального тока. Закон Ома в комплексной форме.

преподаватель:
доцент кафедры электротехники, автоматики и метрологии, к.п.н. ***Елена Артуровна Вахтина***

Лекция 7

ПЛАН

1. Активный элемент– резистор ***R***
2. Реактивные элементы:

   2.1 Индуктивность ***L***

   2.2 Емкость ***C***

3. Закон Ома в комплексной форме

1. Какими тремя величинами характеризуют синусоидально изменяющуюся функцию?

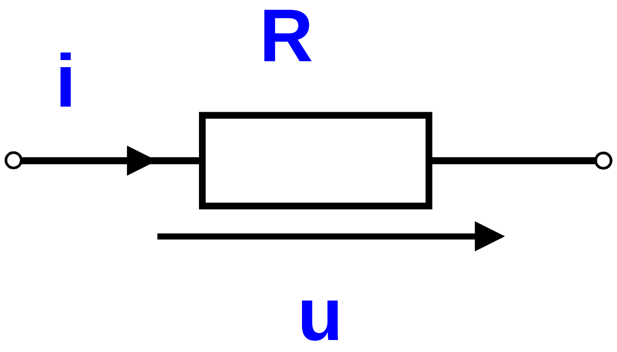
2. Частота изменения одного из синусоидальных напряжений равна 50 Гц, а другого - 60 Гц. У какого из них больше период изменения?

3. Почему среднее значение синусоидального тока определяют за полпериода, а не за период?

4. Зависят ли средние и действующие значения синусоидальных токов от их начальных фаз?

1. Активный элемент– резистор R

Пусть ***R*** подключено к источнику синусоидального напряжения ***u***

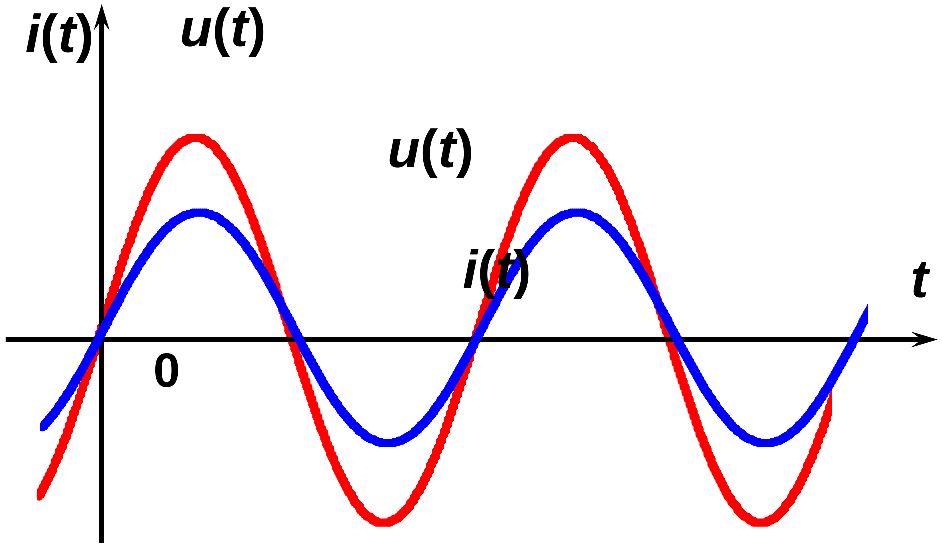


$$u = U_m \cdot \sin \mu t \qquad (1)$$

$$i(t) = \frac{u}{R} = \frac{U_m \cdot \sin \mu t}{R} = I_m \cdot \sin \mu t \qquad (2)$$

$$I_m = \frac{U_m}{R} \qquad (3)$$

$$I = \frac{U}{R}$$

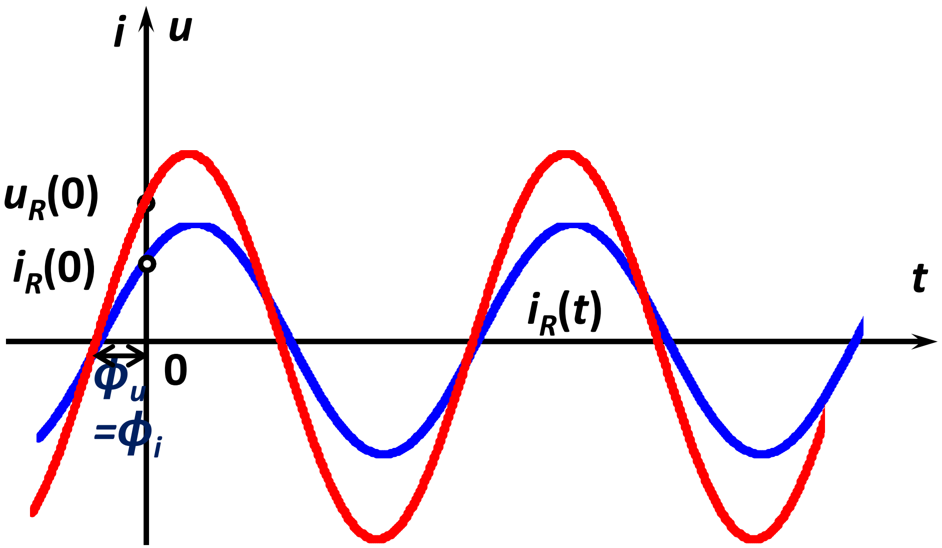


1. Активный элемент – резистор *R*

Если начальная фаза тока ≠0 = ϕ, то

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \phi_u)$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \phi_i)$$



$$\Rightarrow \quad \Delta^{\cdot\cdot}{}_R = {}^{\cdot\cdot}{}_u - {}^{\cdot\cdot}{}_i = 0$$

Угол сдвига фаз между напряжением и током = 0, т.к $\phi_u = \phi_i = \phi$

Представим теперь напряжение и ток комплексными амплитудами:

$$\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j^{\cdot\cdot}u}$$

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j^{\cdot\cdot}i}$$

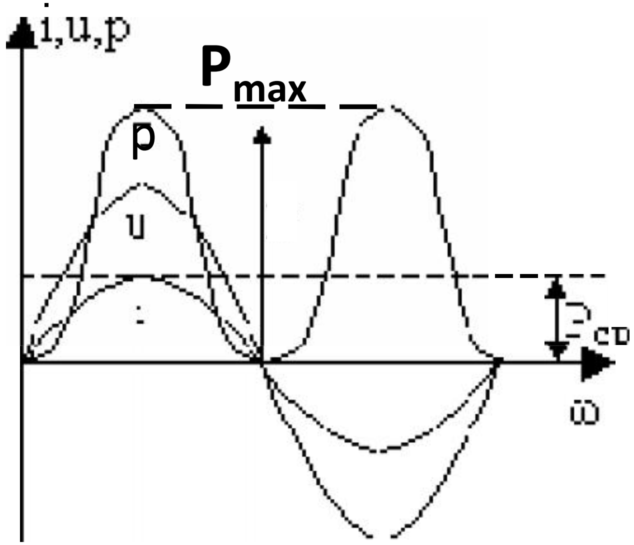
Закон Ома в комплексной форме

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R} \qquad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$$

1. Активный элемент – резистор *R*

Мгновенная мощность

$$p = u \cdot i = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin \omega t = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t =$$
$$= U \cdot I \cdot 2\sin^2 \omega t = U \cdot I \cdot (1 - \cos 2\omega t)$$



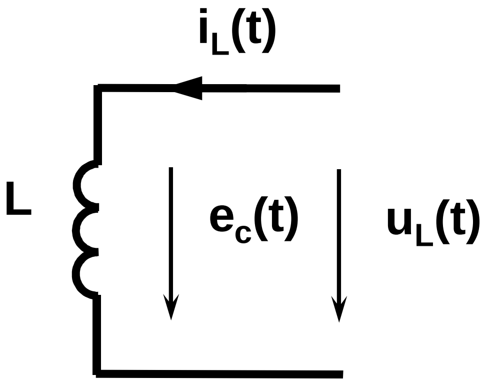
Среднее значение мощности за период:

$$P_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{1}{T}\int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \cdot U \cdot I \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T U \cdot I \cdot dt - \int_0^T U \cdot I \cdot \cos 2\omega t dt\right)^0 = U \cdot I \quad \text{или } I^2 \cdot R \text{ или } \frac{U^2}{R}$$

Средняя мощность – **активная мощность** - преобразуется в резисторе ***R*** в тепло. $P = IU = I^2 R$ [Вт]

2.1 Реактивный элемент – индуктивность *L*

Пусть через катушку индуктивности ***L*** протекает синусоидальный ток



$$i_L(t) = I_{Lm}\sin\mu\ t \qquad (1)$$

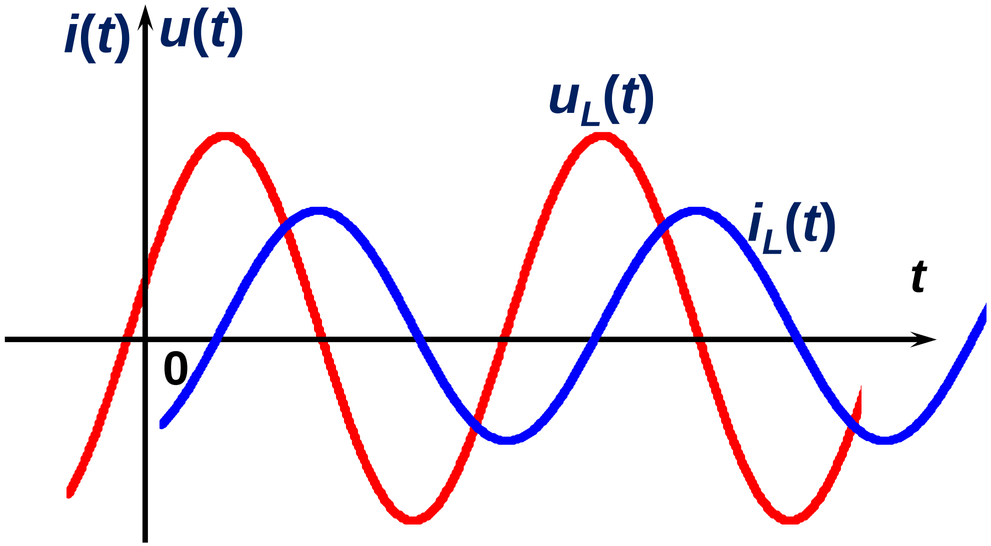
По закону электромагнитной индукции

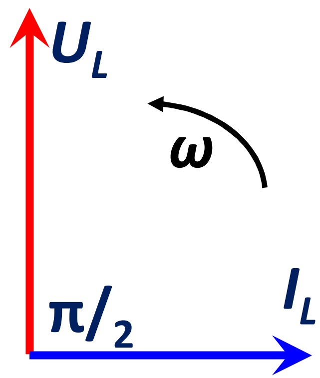
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -e_C(t)$$

$$u_L(t) = U_{Lm}\sin\left(\omega t + \frac{®}{2}\right) \qquad (2)$$

L– идеальная катушка, R_L=0

$$\Delta ¨_L = ¨_{uL} - ¨_{iL} = \frac{®}{2} - 0 = \frac{®}{2}$$





Напряжение идеальной катушке индуктивности опережает ток на 90º

2.1 Реактивный элемент – индуктивность *L*

Лекция 7

Закон Ома $I_L = \frac{U_L}{X_L}$

где $\boxed{X_L = \mu L = 2\text{®}fL}$ индуктивное сопротивление [Ом]

$$\boxed{b_L = \frac{1}{\mu L} = \frac{1}{2\text{®}fL}}$$ индуктивная проводимость, [См]

Перейдем к комплексному выражению тока и напряжения

$$\dot{I}_L = I_L \cdot e^{j\ddot{}\,i} = I_L \cdot e^{j0^\circ} = I_L \qquad \dot{U}_L = U_m \cdot e^{j\ddot{}\,u}$$

Комплексное индуктивное сопротивление

$$\underline{X}_L = j \cdot X_L = e^{+j90^\circ} \cdot X_L$$

Комплексное индуктивная проводимость $\underline{b}_L = \frac{1}{\underline{X}_L} = -j \cdot X_L$

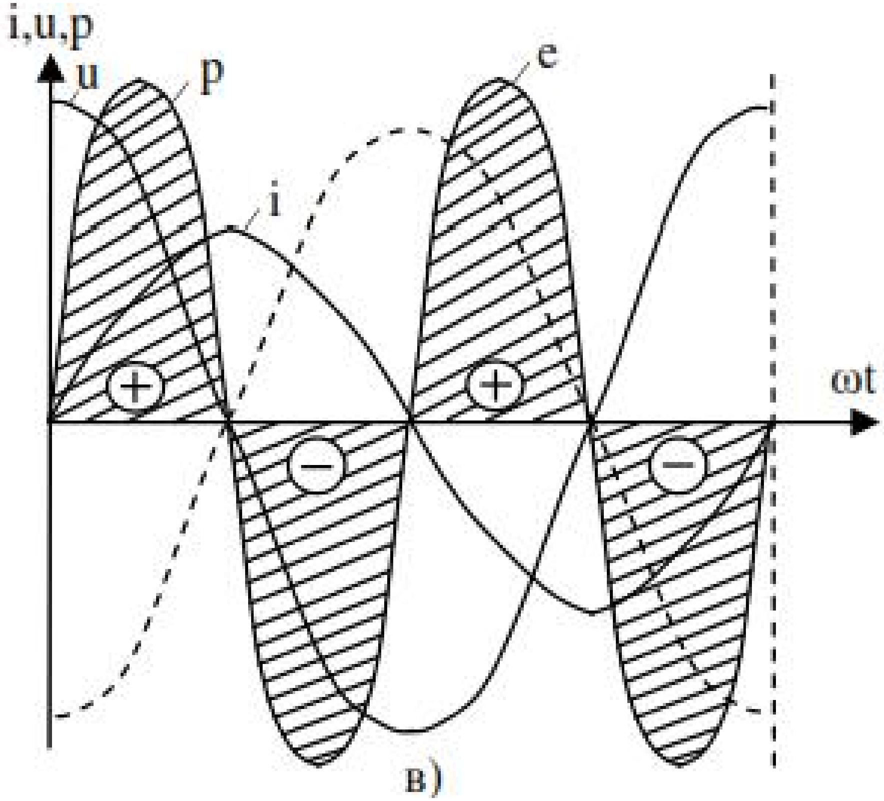
Закон Ома в комплексной форме ⇒ $\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{X}_L}$ $\quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{X}_L}$

2.1 Реактивный элемент – индуктивность *L*

Мгновенная мощность

$$p_L = u_L \cdot i_L = U_{mL} \cdot I_{mL} \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t = 2U_L \cdot I_L \cdot \sin \omega t \cos \omega t = U_L \cdot I_L \cdot \sin 2\omega t$$

$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T U_L \cdot I_L \cdot \sin 2\omega t \cdot dt = \frac{U_L \cdot I_L}{T \cdot 2\omega}\left| -\cos 2\omega t \right|_0^T = \frac{U_L \cdot I_L}{T \cdot 2\omega}(-1+1) = 0$$

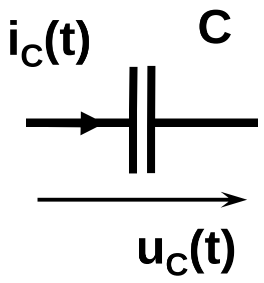


Замечание.

Синусоидальный ток в индуктивном сопротивлении не совершает работы. Поэтому в отличие от ***R*** энергетический режим ***L*** элемента принято оценивать не активной, а реактивной мощностью.

$$Q_L = U_L I_L = X_L \cdot I_L^2 = U_L^2 / X_L \text{ [ВАр]}$$

2.2 Реактивный элемент – конденсатор *C*

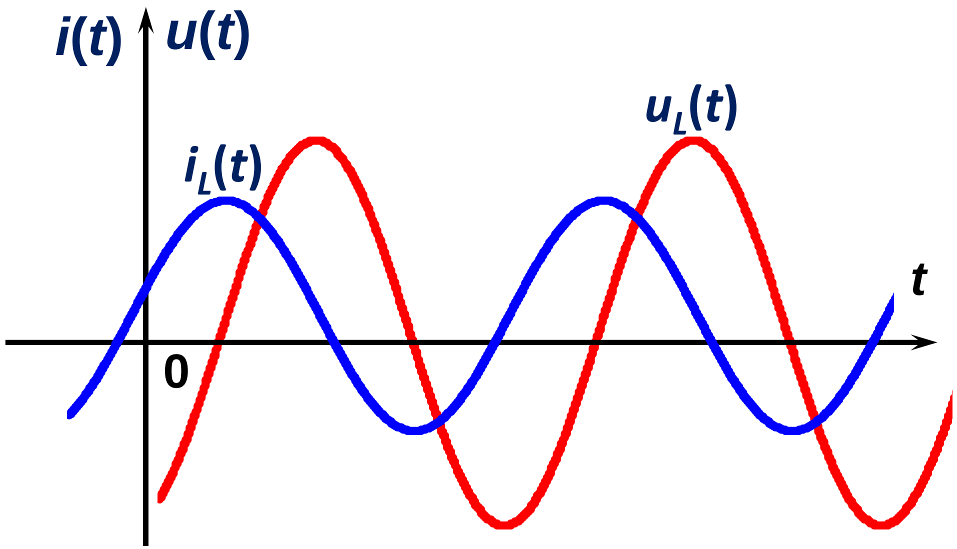


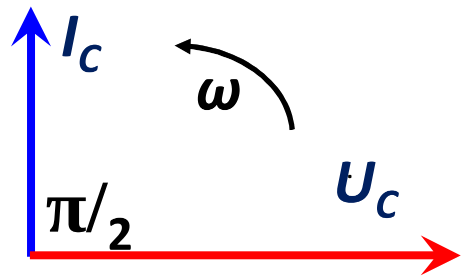
Пусть конденсатор (С) подключается к источнику синусоидального напряжения $u_C(t) = U_{Cm}\sin\omega t$ (1)

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \Rightarrow i_C(t) = I_{Cm}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_{uC} - \varphi_{iC} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

На емкостном элементе ток опережает напряжение на 90°





2.1 Реактивный элемент – конденсатор С

Закон Ома $$I_C = \frac{U_C}{Xc}$$

где $$\boxed{Xc = \frac{1}{\mu C} = \frac{1}{2\text{®}fC}}$$ емкостное сопротивление, [Ом]

$$\boxed{b_C = \frac{1}{X_C} = \mu C = 2\text{®}fC}$$ емкостная проводимость, [См]

Перейдем к комплексному выражению напряжения и тока

$$\dot{U}_C = U_C \cdot e^{j0^\circ} = U_C \qquad \dot{I}_C = I_C \cdot e^{j\ddot{\ }i} = I_C \cdot e^{j90^\circ} = jI_C$$

Комплексное емкостное сопротивление и проводимость

$$\underline{X}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{\dot{U}_C}{I_C \cdot e^{j90}} = X_C \cdot e^{-j90^\circ} = -jX_C$$

$$\underline{b}_C = \frac{1}{\underline{X}_C} = \frac{1}{X_C \cdot e^{-j90}} = b_C \cdot e^{+j90} = j \cdot b_C$$

Закон Ома в комплексной форме

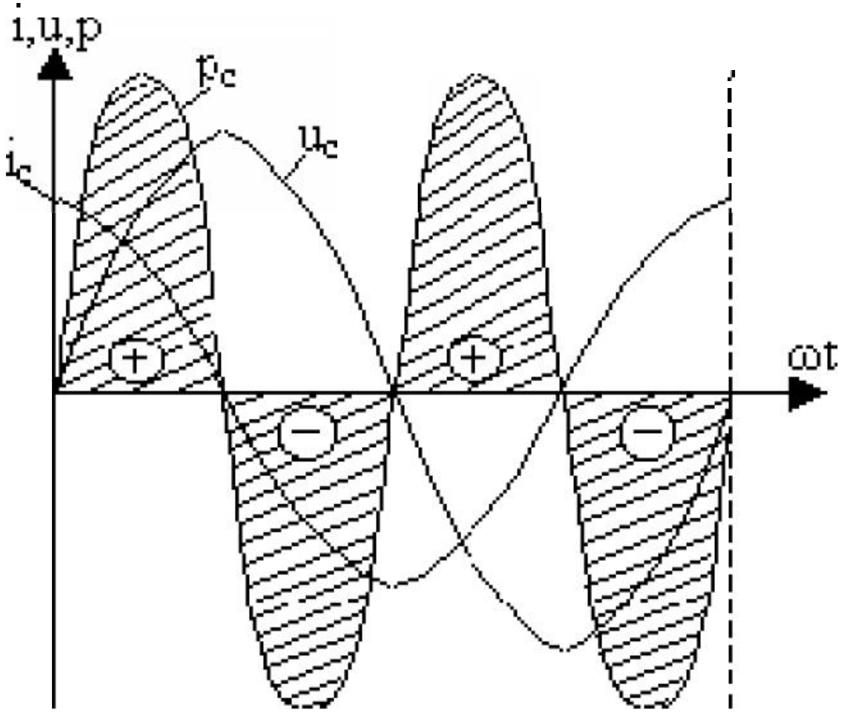
$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{X}_C} = \frac{\dot{U}_C}{-jX_C}$$

2.2 Реактивный элемент – конденсатор *C*

Найдем выражение для мгновенной мощности p_C

$$p_C = u_C \cdot i_C = U_{mC} \cdot \sin\omega t \cdot I_{mC} \cdot \cos\omega t = U_C \cdot I_C \cdot \sin 2\omega t = Q_C \cdot \sin 2\omega t$$

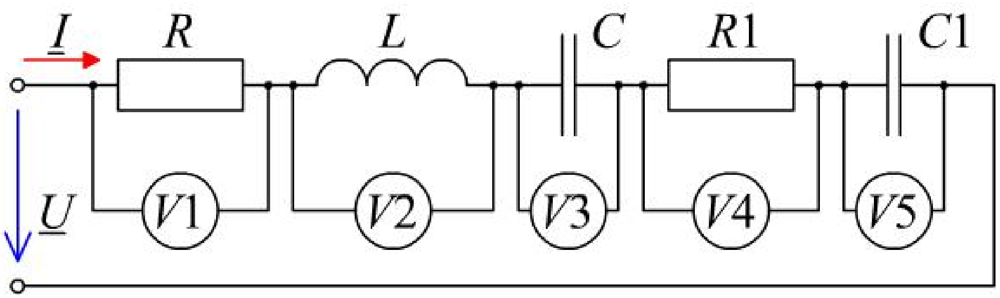
$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T U_C \cdot I_C \cdot \sin 2\omega t \cdot dt = \frac{U_C \cdot I_C}{T \cdot 2\omega}\left|-\cos 2\omega t\right|_0^T = \frac{U_C \cdot I_C}{T \cdot 2\omega}(-1+1) = 0$$



Замечание.
Синусоидальный ток в емкостном элементе не совершает работы. Поэтому энергетический режим ***C*** элемента принято оценивать реактивной мощностью.

$$Q_C = U_C I_C = X_C \cdot I_C^2 = U_C^2 / X_C \text{ [ВАр]}$$

3. ПРИМЕР

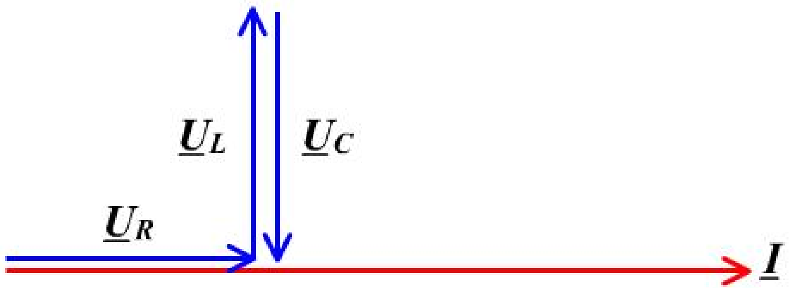


Определить посредством векторной диаграммы напряжение приложенное к сети, если показания всех вольтметров одинаковы V_1, …V_5 и равны 10 В

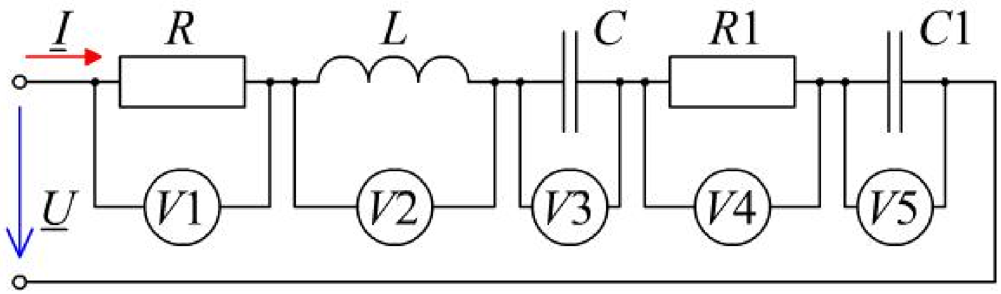
Решение

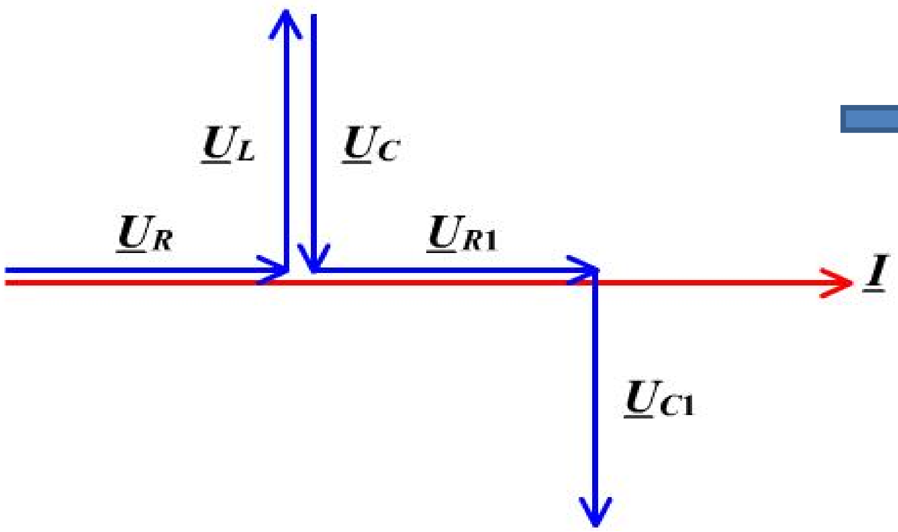
1. Проводим горизонтально вектор тока $\underline{I}$
2. Вычерчиваем вектор $\underline{U}_R$ (модуль U_R = 10 В) параллельно вектору тока $\underline{I}$.

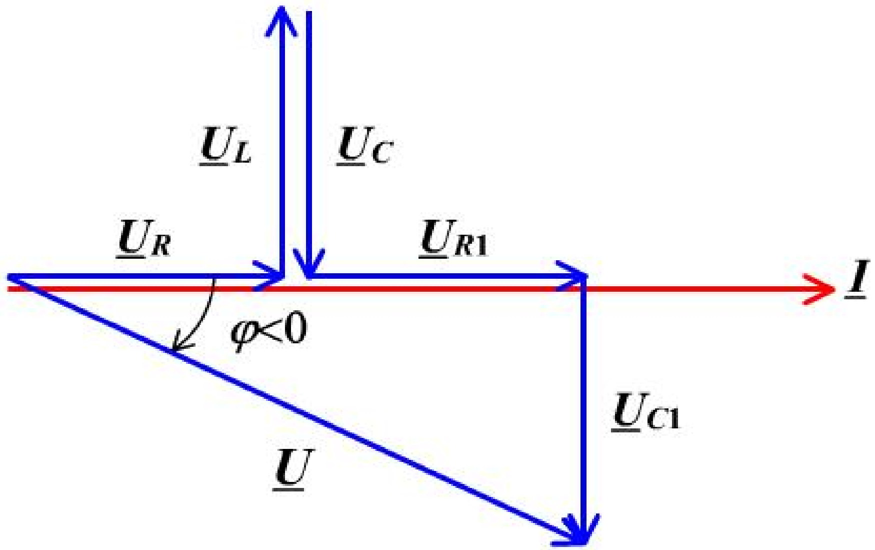
3. С конца вектора $\underline{U}_R$ проводим вверх вектор напряжения $\underline{U}_L$, так как напряжение $\underline{U}_L$ на индуктивном элементе опережает по фазе ток $\underline{I}$ на угол 90°.
4. С конца вектора $\underline{U}_L$ проводим вниз вектор напряжения $\underline{U}_C$, так как напряжение $\underline{U}_C$ на ёмкостном элементе отстаёт от тока $\underline{I}$ по фазе на угол –90°.



3. ПРИМЕР







5. Далее, вектор напряжения $\underline{U}_{R1}$ вычерчиваем параллельно, а вектор $\underline{U}_{C1}$ перпендикулярно вектору тока $\underline{I}$.

6. Соединив начало вектора $\underline{U}_R$ с концом вектора $\underline{U}_{C1}$, получим вектор приложенного к цепи напряжения $\underline{U}$, модуль которого

$$U = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22{,}36 \text{ В}.$$