Тема 2. Лекция.
Элементы векторной алгебры. Линейные векторные пространства

§1. Векторы на плоскости и в пространстве

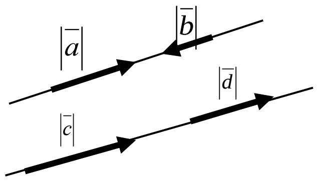
Определение 1. ***Вектором*** называется направленный отрезок, у которого определены начало и конец.

Определение 2. Длиной или ***модулем*** вектора называется длина отрезка *AB*, порождающего данный вектор.

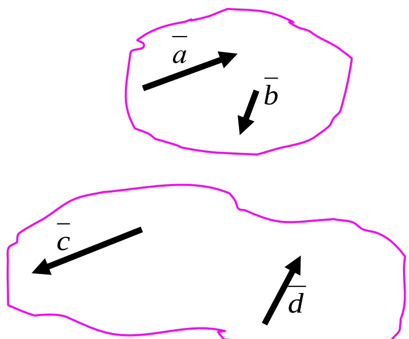
$$\left|\overline{AB}\right| \quad ; \quad \left|\overline{a}\right|$$

В математике рассматривают свободные векторы, которые в пространстве можно перемещать параллельно самим себе.

Определение 3. Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях.



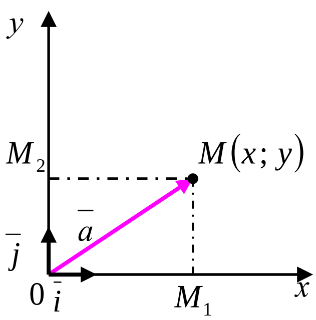
коллинеарные

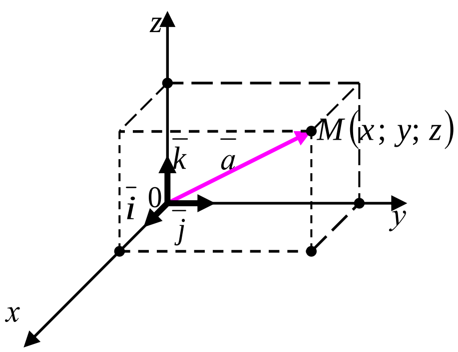


компланарные

<u>Координаты вектора</u>

Построим $\overline{a} = \overline{OM}$ в E^2 и E^3:





Определение 4. ***Координатами*** вектора $\overline{a}$, выходящего из начала координат называются координаты его конечной точки *M*.

$$E^2 : M(x; y);\ \overline{a} = \overline{OM} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = (x; y)$$

$$E^3 : M(x; y; z) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = (x; y; z).$$

Если вектор задан двумя точками, то:

$A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B) \Rightarrow$

$$\boxed{\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)}$$

Действия над векторами в координатной форме:

Если векторы заданы координатами, то:

1) $\overline{a} \cdot \overline{\lambda} = (\lambda \cdot x; \lambda \cdot y; \lambda \cdot z)$

2) $\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$

Определение 5. ***Длина*** вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

$$\boxed{|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Координатный базис:

В системе XOY векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$ образуют базис E^2 (двухмерное пространство):

$\overline{i} \perp \overline{j}$; $|\overline{i}| = |\overline{j}| = 1$

$\overline{i}$ и $\overline{j}$ – орты.

В системе $XOYZ$ векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ образуют базис E^3 (трехмерное пространство):

$\overline{i} \perp \overline{j}$; $\overline{j} \perp \overline{k}$; $\overline{k} \perp \overline{i}$; $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$

$\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – орты

Любой вектор $\overline{OM}$ пространства можно разложить по векторам.

В E^2:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} \\ \overline{OM_1} = x \cdot \overline{i} \quad ; \quad \overline{OM_2} = y \cdot \overline{j} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{OM} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}} \qquad (1)$$

Аналогично в пространстве E^3:

$$\boxed{\overline{OM} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}} \qquad (2)$$

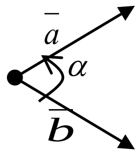
Определение 6. Выражения (1) и (2) называются ***разложением вектора*** по координатному базису.

Определение 7. $x \cdot \overline{i}$; $y \cdot \overline{j}$; $z \cdot \overline{k}$ - называются ***компонентами*** вектора на соответствующие оси.

§2. Скалярное произведение векторов

Определение 1. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению их модулей на $\cos$ угла между ними.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha}$$



Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ - произведение векторов коммутативно.
2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$$

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\bar{a}|^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}}$$

3) Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=0}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 90^\circ=0$$

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=|\bar{i}|^2=1; \quad \bar{i}\cdot\bar{j}=|\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cdot\cos 90^\circ=0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$\left(x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}\right)=$$

$$=x_1\cdot\bar{i}\cdot x_2\cdot\bar{i}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+y_1\cdot\bar{j}\cdot y_2\cdot\bar{j}+$$

$$+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+z_1\cdot\bar{k}\cdot z_2\cdot\bar{k}=$$

$$=\boxed{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти $\cos$ угла между двумя векторами:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}}$$

В координатной форме:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}}$$

Пример:

$\bar{a}=(1;\,2;\,-2)\quad;\quad\bar{b}=\left(2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}\right)$

$\varphi\left(\bar{a}\,\hat{;}\,\bar{b}\right)-?$

$\bar{b}=(2;\,-1;\,2)$

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot2+2\cdot(-1)+(-2)\cdot2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=-\frac{4}{3\cdot3}=-\frac{4}{9}$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)=\pi-\arccos\frac{4}{9}$$

§3. n- мерный вектор

Определение 1. Упорядоченный набор чисел, записанный в виде $\bar{x}=\left(x_1;\,x_2;\,x_3;\,\ldots;\,x_n\right)$, называется ***n - мерным вектором***, где $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ - его координаты или компоненты $\left(\bar{x}\in E^n\right)$.

Понятие ***n*** - мерного вектора широко используется в экономике: некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\overline{x}=(x_1; x_2 \dots x_n)$, а соответствующие цены - вектором $\overline{y}=(y_1; y_2 \dots y_n)$.

Векторы можно:

1) умножать на действительное число

$\lambda \cdot \overline{x}=(\lambda x_1; \lambda x_2; \dots \lambda x_n)$;

2) складывать

$\overline{x}+\overline{y}=(x_1+y_1; x_2+y_2; \dots \; x_n+y_n)$.

Эти операции обладают следующими **свойствами**:

1. $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ - переместительное (коммутативное).
2. $\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})=(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}$ - сочетательное (ассоциативное)
3. $\alpha(\beta\cdot\overline{x})=(\alpha\cdot\beta)\overline{x}$ - ассоциативное относительно числового множителя
4. $\alpha(\overline{x}+\overline{y})=\alpha\overline{x}+\alpha\overline{y}$ - распределительное (дистрибутивное)
5. $(\alpha+\beta)\overline{x}=\alpha\overline{x}+\beta\overline{x}$ - дистрибутивное относительно суммы числовых множителей.
6. Существует нулевой вектор $\overline{0}=(0, 0, \dots 0)$ такой, что $\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$
7. Для любого вектора $\overline{x}$ существует противоположный вектор $(-\overline{x})$ такой, что $\overline{x}+(-\overline{x})=0$
8. $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$ - для любого вектора $\overline{x}$.

Определение 2. Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены действия $\boxed{\overline{x}+\overline{y}}$ и $\boxed{\lambda\overline{x}}$, удовлетворяющие 8- ми свойствам (аксиомам), называется ***векторным пространством***. Если под $\overline{x}; \overline{y}$ понимать элементы любой природы, то множество называется ***линейным пространством.***

Определение 3. Вектор $\overline{a_m}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots \overline{a_{m-1}}$ векторного пространства R, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа:

$$\boxed{\overline{a_m} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} + \ldots + \lambda_{m-1} \overline{a_{m-1}}} \qquad (1)$$

Определение 4. Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_m}$ векторного пространства R называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что:

$$\boxed{\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_m \overline{a_m} = 0} \qquad (2)$$

В противном случае векторы называются ***линейно независимыми*** (два неколлинеарных вектора).

Пример:

Выяснить, являются ли векторы

$\overline{a_1} = (1, 3, 1, 3)$, $\overline{a_2} = (2, 1, 1, 2)$, $\overline{a_3} = (3, -1, 1, 1)$ линейно зависимыми.

Решение:

Составим векторное равенство: $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} = 0$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача свелась к решению системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \sqcup \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Следовательно, система имеет множество решений:

$\lambda_1 = c$; $\lambda_2 = -2c$; $\lambda_3 = c$, где c - произвольное действительное число.

Итак, для данных векторов условие (2) выполняется не только при

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\Rightarrow$ эти векторы линейно зависимые.

Определение 5. Линейное пространство *R* называется ***n- мерным***, если в нем существует ***n*** - линейно независимых векторов.

Определение 6. Максимальное число (***n***) содержащихся в пространстве *R* линейно независимых векторов называется ***размерностью пространства*** и обозначается *dim (R).*

Определение 7. Совокупность ***n*** линейно независимых векторов пространства *R* называется ***базисом***.

$\left(\bar{i}\,;\,\bar{j}\right)-$ базис в E^2

$\left(\bar{i}\,;\,\bar{j}\,;\bar{k}\right)-$ базис в E^3

Определение 8. Если $\overline{e_1}\,;\overline{e_2}\,;\overline{e_3}\ldots\overline{e_n}$ - базис пространства *R*, то вектор $\boxed{\bar{x}=x_1\cdot\overline{e_1}+x_2\cdot\overline{e_2}+x_3\cdot\overline{e_3}+\ldots+x_n\cdot\overline{e_n}}$ называется ***разложением вектора*** $\bar{x}$ по базису, а числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ - ***координатами вектора*** $\bar{x}$ относительно этого базиса.

Пример: Показать, что векторы $\bar{a}=(1;\,2;\,0)\,;\,\bar{b}=(3;\,-1;\,1)\,;\,\bar{c}=(0;\,1;\,1)$, заданные в базисе $\overline{e_1}\,;\overline{e_2}\,;\overline{e_3}$, сами образуют базис.

Решение:

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис, если они линейно независимы.

Составим векторное равенство:

$$\lambda_1\cdot\bar{a}+\lambda_2\cdot\bar{b}+\lambda_3\cdot\bar{c}=0$$

$$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+0\cdot\lambda_3=0\\ 2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

Такая система всегда имеет тривиальное, нулевое решение. Убедимся, что других решений система не имеет:

$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&0\\2&-1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-7&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&1\\1&1\end{vmatrix}=-8\neq0$ $\Rightarrow$ система имеет только нулевое решение, значит, векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют систему линейно независимых векторов и составляют базис.

Теорема. Если $\overline{e_1}\,;\overline{e_2}\,;\overline{e_3}\ldots\overline{e_n}$ - система линейно независимых векторов пространства *R* и любой вектор $\overline{a}$ линейно выражается через $\overline{e_1}\,;\overline{e_2}\,;\overline{e_3}\ldots\overline{e_n}$, то пространство *R* является *n* - мерным, а векторы $\overline{e_1}\,;\overline{e_2}\ldots\overline{e_n}$ - его базисом.

$$\begin{cases} \overline{a_1} = a_{11}\overline{e_1} + a_{12}\overline{e_2} + \ldots + a_{1n}\overline{e_n} \\ \overline{a_2} = a_{21}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \ldots + a_{2n}\overline{e_n} \\ \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\ \overline{a_m} = a_{m1}\overline{e_1} + a_{m2}\overline{e_2} + \ldots + a_{mn}\overline{e_n} \end{cases}$$

(без доказательства).

§4. Евклидово пространство

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов $\overline{x} = (x_1; x_2 \ldots x_n)$ и $\overline{y} = (y_1; y_2 \ldots y_n)$ называется число

$$\boxed{\overline{x}\cdot\overline{y} = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \ldots + x_n\cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i}$$

Скалярное произведение имеет экономический смысл: если вектор $\overline{x} = (x_1; x_2 \ldots x_n)$ - объем различных товаров, а $\overline{y} = (y_1; y_2 \ldots y_n)$ - вектор их цен, то $\overline{x}\cdot\overline{y}$ - выражает суммарную стоимость товаров.

Скалярное произведение обладает **свойствами:**

1. $\overline{x}\cdot\overline{y} = \overline{y}\cdot\overline{x}$ - коммутативность
2. $\overline{x}\cdot\left(\overline{y}+\overline{z}\right) = \overline{x}\cdot\overline{y} + \overline{x}\cdot\overline{z}$ - дистрибутивность
3. $\alpha\cdot\overline{x}\cdot\overline{y} = \alpha\left(\overline{x}\cdot\overline{y}\right)$ - ассоциативность
4. $\overline{x}\cdot\overline{x} > 0$, если $\overline{x}$ - ненулевой вектор
5. $\overline{x}\cdot\overline{x} = 0$, если $\overline{x} = 0$

Определение 2. Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырем свойствам (аксиомам), называется ***евклидовым пространством.***

Определение 3. Длиной или ***нормой вектора*** $\overline{x}$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$\boxed{\left|\bar{x}\right| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}$$

Норма вектора обладает **свойствами:**

1. $\left|\bar{x}\right| = \bar{0}$, если $\bar{x} = \bar{0}$

2. $\left|\lambda\cdot\bar{x}\right| = \left|\lambda\right|\cdot\left|\bar{x}\right|$, где λ - действительное число

3. $\left|\bar{x}\cdot\bar{y}\right| \le \left|\bar{x}\right|\cdot\left|\bar{y}\right|$ - неравенство Коши - Бунявского

4. $\left|\bar{x}+\bar{y}\right| \le \left|\bar{x}\right| + \left|\bar{y}\right|$ - неравенство треугольника

В евклидовом пространстве можно тоже находить $\cos$ угла между двумя векторами:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\left|\bar{x}\right|\cdot\left|\bar{y}\right|}}\text{ , где } 0 \le \alpha \le \pi.$$

Такое определение вполне корректно, так как согласно неравенству Коши - Бунявского

$$\left|\bar{x}\cdot\bar{y}\right| \le \left|\bar{x}\right|\cdot\left|\bar{y}\right|\text{, т.е. } \cos\alpha \le 1.$$

Определение 4. Два вектора называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Определение 5. Векторы $\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3 \ldots \bar{e}_n$ n - мерного евклидова пространства образуют ***ортонормированный базис,*** если эти векторы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице, т.е. если

$$\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j = 0 \text{ при } i \ne j \text{ и } \left|\bar{e}_i\right| = 1 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n$$

<u>Теорема.</u> Во всяком n – мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис (без доказательства).

Пример:

E^2: $\bar{i}\perp\bar{j} \quad ; \quad \left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = 1 \quad \Rightarrow$
базис $(\bar{i}\,;\bar{j})$ – ортонормированный

E^3: $\bar{i}\perp\bar{j} \quad ; \quad \bar{j}\perp\bar{k} \quad ; \quad \bar{k}\perp\bar{i} \quad ; \quad \left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = \left|\bar{k}\right| = 1 \quad \Rightarrow$
базис $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ – ортонормированный

R^n: $\bar{i} = (1;0;0) \quad ; \bar{j} = (0;1;0) \quad ; \bar{k} = (0;0;1)$

$\bar{e}_1 = (1;0;0) \quad ; \bar{e}_2 = (0;1;0;0\ldots) \quad ; \bar{e}_n = (0;0;\ldots\ldots1)$