Лекция 5

Применение производной к исследованию функций

§13. Правило Лопиталя для вычисления пределов

Пусть заданы некоторые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, дифференцируемые на некотором интервале $(a;b)$, а в точке x_0 обращающиеся в ноль.

Теорема 1. Если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, то существует и предел отношения самих функций $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=A$ и эти пределы равны.

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A}$ - **правило Лопиталя** для неопределенности $\left|\dfrac{0}{0}\right|$.

Замечания:

1. Если после однократного использования этой формулы вновь получится неопределенность $\left|\dfrac{0}{0}\right|$, то можно еще раз применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}= \text{ и т.д.}$$

2. Требования $f(x_0)=0$ и $\varphi(x_0)=0$ равносильны тому, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

Теорема 2 . Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы во всех точках ε – окрестности точки x_0 и

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$, тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, то существует и предел отношения самих функций $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$ и эти пределы равны.

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=}$ - правило Лопиталя для неопределенности $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$.

Замечания.

С помощью правила Лопиталя можно находить пределы в следующих случаях:

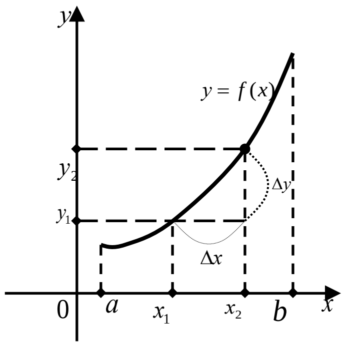
1. При раскрытии неопределенности $(0\cdot\infty);(\infty-\infty)$, сведением их при помощи преобразований к неопределенности вида $\left|\frac{0}{0}\right|$ или $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$.
2. $\left|1^{\infty}\right|;\ \left|0^{0}\right|$ - следует выражение предварительно прологарифмировать.

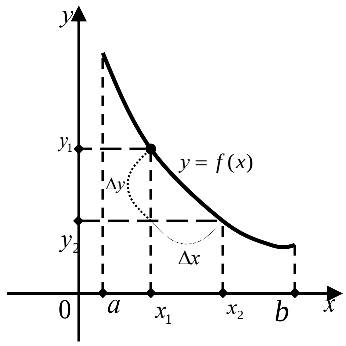
Пример:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{2x-3}=\frac{4}{4-3}=4$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{7}=\frac{5}{7}$
3. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(\pi-x)\cdot\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\pi}\sin\frac{x}{2}=$

$=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-1}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$

§14. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции





$y = f(x)$ *– возрастает*

$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$

$\Delta y = y_2 - y_1 > 0$

$\boxed{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0}$

$y = f(x)$ *– убывает*

$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$

$\Delta y = y_2 - y_1 < 0$

$\boxed{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0}$

$y = f(x)$ – возрастает

$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$

$\Delta y = y_2 - y_1 > 0$

$\boxed{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0}$

$y = f(x)$ – убывает

$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$

$\Delta y = y_2 - y_1 < 0$

$\boxed{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0}$

1. Необходимые условия.

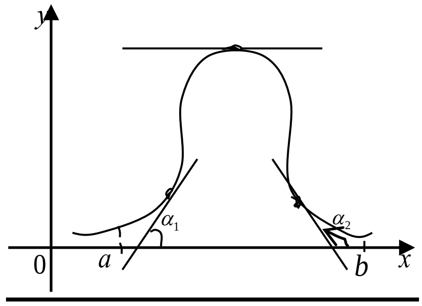
Определение 1. Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ **возрастает,** то ее производная y' остается неотрицательной на этом интервале:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0}$$

Определение 2. Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ **убывает**, то ее производная остается не положительной:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0}$$

<u>Геометрически</u>



1. $\angle\alpha_1$ - острый

$\operatorname{tg}\alpha_1 \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0$

2. $\angle\alpha_2$ - тупой

$\operatorname{tg}\alpha_2 \leq 0 \Rightarrow y' \leq 0$

2. Достаточные условия.

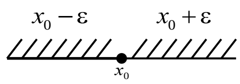
Определение 3. Если функция на интервале $(a;b)$ в каждой точке имеет положительную производную, то функция на этом интервале ***возрастает***.

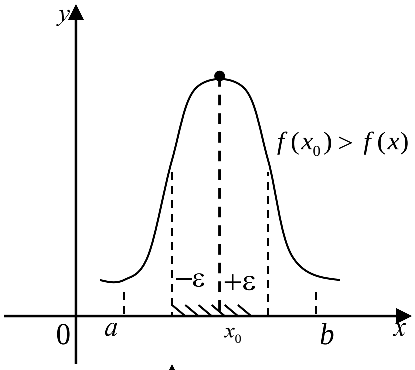
Определение 4. Если функция в каждой внутренней точке интервала $(a;b)$ имеет отрицательную производную, то функция ***убывает*** на этом интервале.

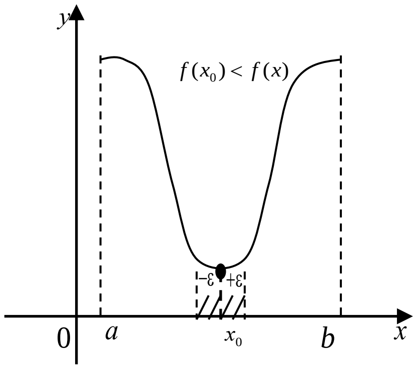
§15 Экстремумы функции

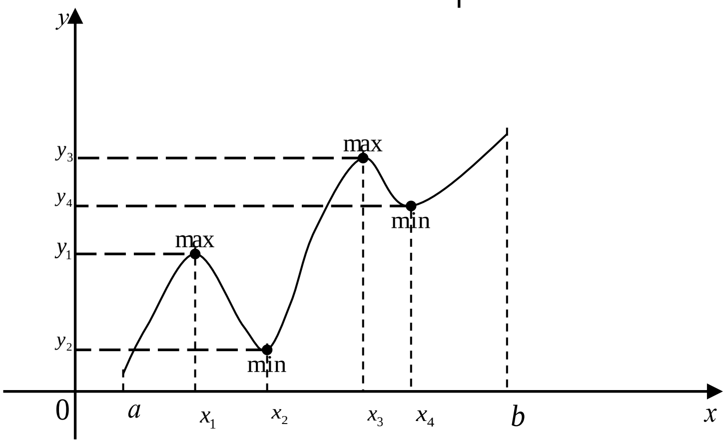
Определение 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и в точке x_0 имеет $\max$, то значение функции $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in$ некоторой ε – окрестности точки x_0.

$x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$









Определение 2. Min и max данной функции $y = f(x)$ называются ***экстремумами***.

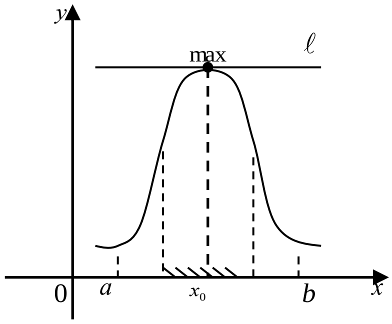
Экстремумы носят локальный (местный) характер. Это значит, что значение $\min$ функции может быть больше $\max$ ($y_{\min}(x_4) > y_{\max}(x_1)$).

Определение 3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале $(a;b)$, то на этом интервале существуют точки, в которых функция принимает ***наибольшее*** и ***наименьшее*** значения.

$y(b)$ - наибольшее; $y(a)$ - наименьшее.

§16. Необходимый признак существования экстремума

Геометрически



$y'(x_0)=0$

$\ell \parallel OX$; $\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = 0 \Rightarrow y' = 0$

Определение 1. Если дифференцируемая функция в точке x_0 имеет $\max$ или $\min$, то производная этой функции в данной точке равна нулю.

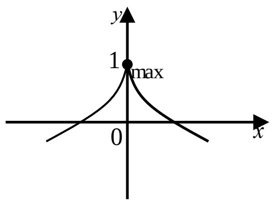
Замечание.

Функция может иметь экстремум и в точке, в которой производная не существует.

Пример: $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$; $x \in (-\infty; \infty)$

$y' = 0 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $y' \neq 0$; y' не существует при $x = 0$.

Функция имеет острый $\max$, т.е. нельзя провести касательную.



Определение 2. Точки, в которых производная данной функции равна нулю или не существует, называются ***критическими***.

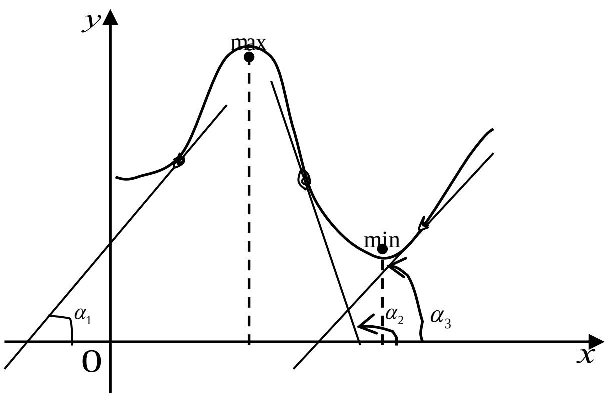
§17. Первый достаточный признак существования экстремума

x	$(a;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	$(x_2;b)$
y'	+	**0**	-	**0**	+
y	↗		↘		↗
		max		min	

Определение 1. Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет производную во всех внутренних точках интервала $(a;b)$, содержащем критическую точку x_0, и при переходе слева направо через критическую точку производная меняет знак, то в этой точке существует ***экстремум***:

1). Если знак меняется с (+) на (-), то в этой точке $\underline{\max}$.

2). Если знак меняется с (-) на (+), то в этой точке $\underline{\min}$.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 - \text{острый}\,;\, tg\alpha_1 > 0\,;\, y' > 0(+) \\ \alpha_2 - \text{тупой}\,;\, tg\alpha_2 < 0\,;\, y' < 0(-) \end{array}\right\}\max$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 - \text{тупой}\,;\, tg\alpha_2 < 0\,;\, y' < 0(-) \\ \alpha_3 - \text{острый}\,;\, tg\alpha_3 > 0\,;\, y' > 0(+) \end{array}\right\}\min$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 - \text{острый}\,;\, \mathrm{tg}\,\alpha_1 > 0\,;\, y' > 0(+) \\ \alpha_2 - \text{тупой}\,;\, \mathrm{tg}\,\alpha_2 < 0\,;\, y' < 0(-) \end{array}\right\}\max$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 - \text{тупой}\,;\, \mathrm{tg}\,\alpha_2 < 0\,;\, y' < 0(-) \\ \alpha_3 - \text{острый}\,;\, \mathrm{tg}\,\alpha_3 > 0\,;\, y' > 0(+) \end{array}\right\}\min$$

Замечание.

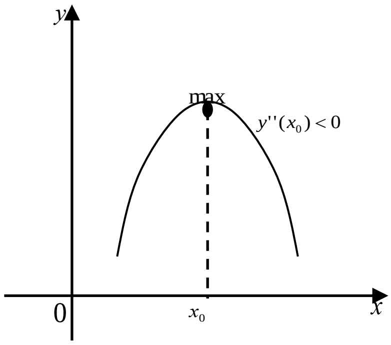
Если при переходе через критическую точку производная знак не меняет, то в данной точке экстремума нет.

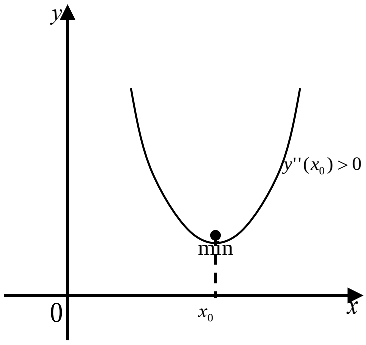
§18. Второй достаточный признак существования экстремума

Определение 1. Если в точке x_0 производная равна нулю $\left(y'(x_0)=0\right)$, y'' - существует и не равна нулю, то, если:

$\underline{y''(x_0) < 0}$ - то функция имеет $\underline{\max;}$

$\underline{y''(x_0) > 0}$ - то функция имеет $\underline{\min}$.

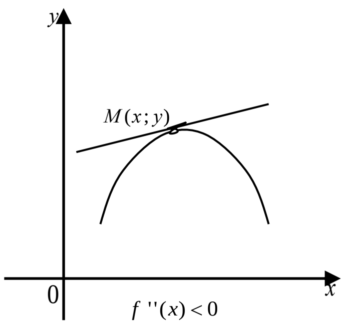


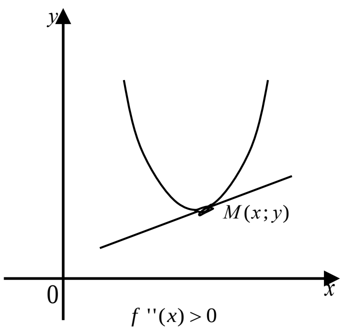


Замечание.

Если y'' в критической точке обращается в ноль или не существует, вторым достаточным признаком пользоваться нельзя и следует перейти к 1-му достаточному признаку.

§19. Выпуклость и вогнутость графика функции





Определение 1. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым***, если он расположен ***ниже*** любой своей касательной.

Определение 2. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***вогнутым***, если он расположен ***выше*** любой своей касательной.

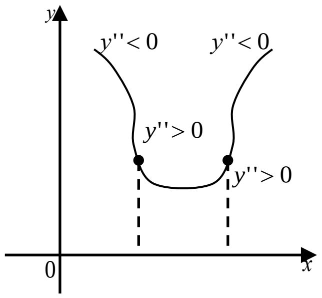
Достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции.

Определение 3. Если для дважды дифференцированной функции $y = f(x)$ на интервале $(a;b)$:

а) $\underline{f''(x) < 0}$ во всех точках интервала, то график функции ***выпуклый*** на этом интервале;

б) $\underline{f''(x) > 0}$ - то график ***вогнутый.***

Определение 4. Точки графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющие выпуклую часть от вогнутой, называют ***точками перегиба***.



Пусть в некоторой точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна и, если при переходе через точку x_0 y'' меняет знак, то график функции в точке x_0 имеет точку перегиба.

Необходимое условие существования точки перегиба.

Определение 5. Точки перегиба следует искать только среди таких, в которых вторая производная обращается в ноль или не существует.

x	$(a;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	$(x_2;b)$
y''	+	**0**	-	**0**	-
y		перегиб		нет перегиба	

§20. Асимптоты графика функции

Определение 1. Прямая называется ***асимптотой*** для кривой, если расстояние от текущей точки M этой кривой до прямой стремится к нулю, при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Асимптоты бывают:

1) вертикальные;
2) наклонные;
3) горизонтальные.

1. Наклонные асимптоты (их не более двух).

Уравнения наклонных асимптот ищут в виде $\boxed{y = kx + b}$,

где $\boxed{k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x}}$; $\boxed{b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - kx)}$.

Замечания:

1. Эти пределы должны существовать и быть конечными, иначе наклонных асимптот нет.
2. Если $k = 0$ => $\boxed{y = b}$ - горизонтальная асимптота

$k = 0$; $b = 0$ => $\boxed{y = 0}$ - горизонтальная асимптота – ось OX.

3. Горизонтальные асимптоты – это частный случай наклонных асимптот.

2. Вертикальные асимптоты.

Если функция $y = f(x)$ имеет точки разрыва, то график этой функции имеет вертикальные асимптоты.

Определение 2. Прямая $x = a\left(\ell \parallel OY\right)$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$$

График функции может иметь одну, две или бесконечное множество вертикальных асимптот.

§21. Общая схема исследования функции

1. Область определения функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты.
2. Нули функции (точки пересечения графика с осями координат).
3. Четность и нечетность функции (симметрия графика).
4. Наклонные и горизонтальные асимптоты.
5. Интервалы возрастания и убывания функции, экстремум функции.
6. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.
7. Эскиз графика функции.

§22. Наименьшее и наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная дифференцируемая функция $y = f(x)$. Тогда по свойству непрерывной функции на этом отрезке всегда найдутся такие точки, в которых функция будет принимать наибольшее и наименьшее значения.

Правило нахождения.

1) Находим производную y' и приравниваем ее к нулю.

$y' = 0$; $x_1; x_2$ ... - критические точки. Исключаем точки, не входящие в отрезок $[a;b]$.

2) Вычисляем значение функции в критических точках, не доказывая вида экстремума.
3) Вычисляем значение функции на концах отрезка.

4) Из всех значений выбираем наименьшее и наибольшее, т.е. находим тотальный максимум и тотальный минимум.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9$ на $\left[-1;2\right]$.

1) $y' = 3x^2 - 12x$; $y' = 0$; $3x^2 - 12x = 0$

$3x\left(x-4\right) = 0$; $x_1 = 0 -$ кр. точка

$x_2 = 4 \notin \left[-1;2\right]$.

2) $y(0) = 9$ - наибольшее значение.

3) $y(-1) = -1 - 6 + 9 = 2$

$y(2) = 8 - 24 + 9 = -7$ - наименьшее зхначение.