Тема 2. Количественные характеристики и схемы оценки рисков в условиях неопределенности

Лекция 1 (2 часа)

1. *Матрицы последствий и матрицы рисков.*
2. *Анализ связанной группы решений в условиях полной неопределенности (Правило Вальда. Правило Сэвиджа. Правило Гурвица).*

Лекция 2 (2 часа)

1. *Анализ связанной группы решений в условиях частичной неопределенности. Правило Лапласа равновозможности.*
2. *Оптимальность по Парето при учете двух характеристик финансовой операции.*

Лекция 1 (тема 2)

2.1. Матрицы последствий и матрицы рисков

Ситуации, связанные с полной неопределенностью, будем рассматривать с помощью теории игр. Всякая теоретико-игровая модель отражает, кто и как конфликтует, а также, кто и в какой форме заинтересован в том или ином исходе конфликта. действующие в конфликте стороны назовем игроками, а их решения – стратегиями. Содержание математической теории игр состоит, *во-первых*, в установлении принципов оптимального поведения игроков в играх, *во-вторых*, в доказательстве существования ситуаций, которые складываются в результате применения этих принципов, *в-третьих*, в разработке методов фактического нахождения таких ситуаций. ***Игрой*** называется следующая формально задаваемая система множеств:

1) множество участвующих в конфликте действующих начал, или *коалиций действия*;
2) семейство множеств стратегий каждой из коалиций действия;
3) множество ситуаций;
4) множество заинтересованных начал, или *коалиций интересов*;
5) семейства отношений, выражающих предпочтения между ситуациями для коалиций интересов.

Понятие риска предполагает наличие рискующего, т.е. Лица, Принимающего Решения (ЛПР).

Игры с одной коалицией действия называются *нестратегическими*. Важным классом таких игр являются *игры с природой*, применяемые для анализа экономических ситуаций, при которых риск связан с совокупностью неопределенных факторов окружающей среды. Термин «природа» характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально.

Игры с двумя или более коалициями действий называются *стратегическими*.

В играх создание модели должно начинаться с построения ***матрицы игры, т.е. платежной матрицы, или матрицы выигрышей.*** Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников (игрок 1). Игрок 2 (природа) не действует, а выступает как партнер по игре, не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы».

Допустим, рассматривается вопрос о проведении финансовой операции в условиях неопределенности. При этом у игрока 1 (ЛПР) есть m возможных решений (ситуаций) $i = 1,2,...,m,$ а реальная ситуация неопределенна, или «природа» может принимать одно из n возможных состояний $j = 1,2,..., n$. Пусть известно, что если ЛПР примет i-е решение, а ситуация примет j-ый вариант состояния, то будет получен доход q_{ij}. Матрица $Q = (q_{ij})$ называется ***матрицей последствий*** (возможных решений, выигрышей).

Матрицу игры с природой можно задавать и в виде т.н. матрицы рисков или матрицы упущенных возможностей. Величина риска – это размер платы за отсутствие информации о состоянии среды. Матрица рисков строится на основе матрицы выигрышей. Оценим размеры риска в данной схеме.

Пусть принимается i-е решение. Очевидно, если бы было известно, что реальное состояние среды будет j-е, то ЛПР принял бы решение, дающее доход $q_j = \max\limits_i q_{ij}$. Однако, i-е решение принимается в условиях неопределенности. Значит, ЛПР рискует получить не q_j , а только q_{ij}. Таким образом, существует реальная возможность недополучить доход, и этому неблагоприятному исходу можно сопоставить риск r_{ij}, размер которого целесообразно оценить как разность

$$r_{ij} = q_j - q_{ij}. \qquad (2.1)$$

Матрица $R = (r_{ij})$ называется ***матрицей рисков.***

Пример 2.1. Используя формулу (2.1), составьте матрицу рисков $R = (r_{ij})$ по заданной матрице последствий

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Очевидно, $q_1 = \max\limits_i q_{i1} = 8$; аналогично $q_2 = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 12$. Следовательно, матрица рисков имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.2. Анализ связанной группы решений в условиях полной неопределенности

Полная неопределенность означает отсутствие информации о вероятностных состояниях среды (“природы”), например, о вероятностях тех или иных вариантов реальной ситуации; в лучшем случае известны диапазоны значений рассматриваемых величин. Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состояния среды, называют «безнадежной», или «дурной». Рекомендации по принятию наилучших решений в таких ситуациях сформулированы в виде определенных правил (критериев). К основным критериям относятся следующие:

1) критерий оптимизма (критерий максимакса) соответствует оптимистической наступательной стратегии; здесь не принимается во внимание никакой возможный результат, кроме наилучшего;
2) критерий гарантированного результата (максиминный критерий Вальда) – пессимистический, по сути, критерий, т.к. во внимание принимается только

наихудший результат каждой альтернативы. Этот подход устанавливает гарантированный минимум, фактический результат может быть лучше;

3) критерий минимаксного риска Сэвиджа, или критерий наименьшего вреда, который определяет худшие возможные последствия для каждой альтернативы и выбирает альтернативу с лучшим из плохих значений;
4) критерий обобщенного максимина (пессимизма – оптимизма) Гурвица позволяет учитывать состояние между крайним пессимизмом и крайним оптимизмом;
5) критерий пессимизма характеризуется выбором худшей альтернативы с худшим из всех худших значений окупаемости.

При сравнительном анализе критериев эффективности нецелесообразно останавливаться на выборе единственного критерия, т.к. в ряде случаев это может привести к неоправданным решениям, ведущим к потерям экономического и иного содержания. В большинстве ситуаций имеется необходимость применения нескольких критериев в совокупности. Например, наряду с критерием гарантированного результата Вальда может быть использован критерий минимаксного риска Сэвиджа и т.п.

1. Критерий (правило) максимакса. При использовании критерия, ЛПР ориентируется на то, что условия функционирования анализируемых систем будут для него наиболее благоприятными. Вследствие этого оптимальным решением является стратегия, максимизирующая максимальные выигрыши - например, доходы – для каждого варианта ситуации. Это критерий ***крайнего ("розового") оптимизма,*** предполагающий максимальный выигрыш, равный наибольшему значению критерия оптимальности в платежной матрице $\max_i \left(\max_j q_{ij} \right)$. Критерий целесообразно применять в тех случаях, когда имеется принципиальная возможность повлиять на функции противоположной стороны. Если анализируется матрица эффекта $Q(\mathrm{P},\Pi)$ того или иного вида, то выбор управляемых факторов осуществляется таким образом, чтобы обеспечить максимум эффекта. В этом случае критерий оптимизма записывается в виде

$$Q_o = \max_i \max_j Q(\mathrm{P},\Pi) = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le n} q_{ij}$$

Рассматривая *i*-е решение, предполагают самую хорошую ситуацию, приносящую доход $a_i = \max_j q_{ij}$, а затем выбирают решение с наибольшим a_i.

Рассмотрим пример (2.2). Для матрицы последствий в примере 2.1 выбрать вариант решения по критерию максимакса.

Решение. Находим последовательность значений $a_i = \max_j q_{ij}$: $a_1=8$, $a_2=12$, $a_3=10$, $a_4=8$. Из этих значение находим наибольшее: $a_2=12$. Следовательно, критерий максимакса рекомендует принять второе решение ($i=2$).

2. Правило Вальда (правило максимина, или критерий крайнего пессимизма). Сущность критерия состоит в следующем. ЛПР располагает множеством стратегий решения проблемы: $P=\{P_i\}, i=1,...m$. Указанные стратегии считаются контролируемыми (управляемыми) факторами. В качестве этих факторов могут быть: технические параметры проектируемых систем, экономические показатели состояния предприятия, различные варианты решения поставленных задач и т.п. Наряду с управляемыми действуют и неуправляемые (неконтролируемые) факторы: $\Pi=\{\Pi_j\}$, $j=1,...n$. В качестве этих факторов могут быть: уровень спроса на товары, предлагаемые фирмой, рыночные

цены, условия эксплуатации технических и производственных систем, действия конкурентов и т.д.

Для оценки эффективности принимаемых решений вводим показатель эффективности Q и считаем, что функция $Q(P,\Pi)$ является известной. Так как факторы P и Π является дискретными, то и эффективность Q также представляет собой множество дискретных чисел. таким образом, каждой точке контролируемых и неконтролируемых факторов (P_i,Π_j), ставится в соответствие значение эффективности $Q\,(\mathrm{P}_i,\Pi_j)$. Следовательно можно построить матрицу эффективности:

Таблица 1

Матрица эффективности

Π_j / $\mathrm{P_i}$	Π_1	Π_2	…	Π_n	$\min\limits_j q_{ij}$
P_1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1n}	$q(\mathrm{P}_1,\Pi)\min$
P_2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2n}	$q(\mathrm{P}_2,\Pi)\min$
…	…	…	…	…	…
P_m	q_{m1}	q_{m2}	…	q_{mn}	$q(\mathrm{P}_m,\Pi)\min$

Дл каждого контролируемого фактора (строки) находится $\min\limits_j q(\mathrm{P}_{i,}\Pi_j)$, в результате чего определяется набор значений показателя эффективности $q(\mathrm{P}_1,\Pi)\min$, $q(\mathrm{P}_2,\Pi)\min$,…, $q(\mathrm{P}_2,\Pi)\min$. Сравнивая полученные величины, выбирают управляемый фактор, при котором обеспечивается максимальное значение $Q\,(\mathrm{P},\Pi)$. Другими словами, рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход: $b_i = \min q_{ij}$. Затем выбираем решение i_0 с наибольшим b_{i_0}. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 такое, что $b_{i_0} = \max\limits_i b_i = \max\limits_i \left(\min\limits_j q_{ij} \right)$. Таким образом, критерий гарантированного результата (максиминный критерий Вальда) записывается в виде:

$$Q_{\Gamma} = \max_i \min_j Q(\mathrm{P},\Pi) = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} q_{ij}$$

Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, или минимизацию максимальных потерь, которые могут быть при реализации одной из стратегий. Критерий консервативен, т.к. ориентирует ЛПР на слишком осторожную линию поведения. Величина, соответствующая максимальному критерию, наз. *нижней ценой игры*, под которой понимается максимальный выигрыш, гарантируемый в игре с данным противником одной из своих стратегий при минимальных результатах. Это перестраховочная позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай.

Рассмотрим пример (2.3). Для матрицы последствий в примере 2.1 выбрать вариант решения по критерию Вальда.

Решение. В примере 2.1 имеем $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_4 = 1$. Теперь из этих значений выбираем максимальное $b_3 = 3$. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение ($i=3$).

3. Правило Сэвиджа (критерий минимаксного риска). Этот критерий аналогичен предыдущему критерию Вальда, но ЛПР принимает решение, руководствуясь не матрицей последствий Q, а матрицей рисков $R = (r_{ij})$. Возможны ситуации, кгда неконтролируемые

факторы будут действовать более благоприятным образом по сравнению с наихудшим состоянием, на которое ориентировалось ЛПР. Выбор стратегии аналогичен выбору стратегии по принципу Вальда с тем отличием, что игрок руководствуется не матрицей выигрышей Q, а матрицей рисков R. Критерий Сэвиджа формулируется следующим образом:

$$Q_{rc} = \min_i \max_j R(\mathrm{P}, \Pi) = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}$$

По этому критерию лучшим является решение, при котором максимальное значение риска будет наименьшим, т.е. равным $\min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$. Рассматривая i-е решение, предполагают ситуацию максимального риска $r_i = \max_j r_{ij}$ и выбирают вариант решения i_0 с наименьшим $r_{i_0} = \min_i b_i = \min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$.

Рассмотрим пример (2.4). Для исходных данных в примере 2.1 выбрать вариант решения в соответствии с критерием Сэвиджа.

Решение. Рассматривая матрицу рисков R, находим последовательность величин $r_i = \max_j r_{ij}$: $r_1 = 8$, $r_2 = 6$, $r_3 = 5$, $r_4 = 7$. Из этих величин выбираем наименьшую: $r_3 = 5$. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять 3-е решение ($i=3$). Заметит, что это совпадает с выбором по критерию Вальда.

4. Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Критерий Гурвица позволяет учитывать комбинации наихудших состояний. Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и крайним оптимизмом. В соответствии с этим компромиссным критерием определяется линейная комбинация минимального и максимального выигрышей

$$Q_i = \{\lambda \min_{1 \le j \le n} q_{ij} + (1 - \lambda) \max_{1 \le j \le n} q_{ij}\},$$

где λ - коэффициент, рассмтариваемый как показатель оптимизма ($0 \le \lambda \le 1$), и предпочтение отдается варианту решения, для которого максимальным окажется показатель Q_i, т.е.:

$$Q_{i\Gamma} = \max_{1 \le i \le m} \{\lambda \min_{1 \le j \le n} q_{ij} + (1 - \lambda) \max_{1 \le j \le n} q_{ij}\}$$

Таким образом, этот критерий рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом *между крайним оптимизмом и крайним пессимизмом*. При $\lambda=0$ критерий Гурвица совпадает с максимаксным критерием, т.е. ориентирует на предельный риск; при $\lambda=1$ он совпадает с критерием Вальда, т.е. ориентирует на осторожное поведение. Значения λ между 0 и 1 являются промежуточными между риском и осторожностью и выбираются из субъективных (интуитивных) соображений в зависимости от конкретной обстановки и склонности к риску ЛПР.

Рассмотрим пример (2.5). Для приведенной в примере 2.1 матрицы последствий выбрать наилучший вариант решения на основе критерия Гурвица при значении коэффициента оптимизма $\lambda = 1/2$.

Решение. Рассматривая матрицу последствий Q по строкам, для каждого i вычисляем значения $c_i = 1/2 \min q_{ij} + 1/2 \max q_{ij}$. Например, $c_1 = 1/2*2 + 1/2*8 = 5$; аналогично находятся $c_2=7$; $c_3=6{,}5$; $c_4= 4{,}5$. Наибольшим является $c_2=7$. Следовательно, критерий Гурвица при заданном $\lambda = 1/2$ рекомендует выбрать второй вариант ($i=2$).

5. Критерий пессимизма. При использовании принципа пессимизма предполагается, что управляемые факторы могут быть использованы неблагоприятным образом:

$$Q_n = \min_i \min_j Q(\mathrm{P},\Pi) = \min_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} q_{ij},$$

где $Q(\mathrm{P},\Pi)$ - функция эффективности принимаемых решений.

В реальных ситуациях в ряде задач оказывается невозможным контроль за неконтролируемыми факторами, принадлежащими множеству *P*. особенно это относится к задачам, связанным с необходимостью учета фактора времени, например: социально-экономическое прогнозирование, долгосрочное планирование, проектирование сложных объектов и др.

Например, издержки производства являются контролируемыми факторами на коротких временных интервалах. Однако, при анализе длительных процессов, которые составляют несколько лет, некоторые элементы указанных издержек становятся неконтролируемыми. К таким элементам можно отнести: стоимость электроэнергии, стоимость материалов и покупных изделий и т.п.

Другим примером является определение объемов производства продукции предприятия. Данный показатель также считается управляемым фактором. Но он зависит от факторов производства, которые относятся к внутренней среде предприятия: уровень конструкторской и технологической подготовки производства, тип используемого оборудования, квалификация работающих и пр.

Рассмотрим пример (2.6). Для матрицы последствий примера 2.1 выбираем вариант решения по критерию пессимизма.

Решение. В примере 2.1 имеем: при стратегии 1 минимальный доход = 2, стратегия 2 – 2, стратегия 3 – 3, стратегия 4 – 1. Критерий пессимизма рекомендует принять 4-е решение i=4.

Лекция 2 (Тема 2)

2.3. Анализ связанной группы решений в условиях частичной неопределенности

Если при принятии решения ЛПР известны вероятности p_j того, что реальная ситуация может развиваться по варианту j, то говорят, что ЛПР находится в условиях частичной неопределенности. В этом случае можно руководствоваться одним из следующих критериев (правил).

Критерий (правило) максимизации среднего ожидаемого дохода. Этот критерий называется также **критерием максимума среднего выигрыша.** Если известны вероятности p_j вариантов развития реальной ситуации, то доход, получаемый при i-ом решении, является случайной величиной Q_i с рядом распределения

q_{i1}	q_{i2}	…	q_{in}
p_1	p_2	…	p_n

Математическое ожидание $M[Q_i]$ случайной величины Q_i и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также $\overline{Q}_i$:

$$\overline{Q}_i = M[Q_i] = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ij} \ .$$

Для каждого i-го варианта решения рассчитываются величины $\overline{Q}_i$, и в соответствии с рассматриваемым критерием выбирается вариант, для которого достигается $\max\limits_i \overline{Q}_i = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} p_j q_{ij}$

Пример 2.6. Пусть для исходных данных примера 2.1 известны вероятности развития реальной ситуации по каждому из четырех вариантов, образующих полную группу событий:

$p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = 1/6$, $p_4 = 1/6$. Выяснить, при каком варианте решения достигается наибольший средний доход и какова величина этого дохода.

Решение. Найдем для каждого i-го варианта решения средний ожидаемый доход: $\overline{Q}_1 = 1/2*5+1/6*2+1/6*8+1/6*4 = 29/6$, $\overline{Q}_2 = 25/6$, $\overline{Q}_3 = 7$, $\overline{Q}_4 = 17/6$. Максимальный средний ожидаемый доход равен 7 и соответствует третьему решению.

Правило минимизации среднего ожидаемого риска (другое название –**критерий минимума среднего проигрыша**).

В тех же условиях, что и в предыдущем случае, риск ЛПР при выборе i-го решения является случайной величиной R_i с рядом распределения

r_{i1}	r_{i2}	…	r_{in}
p_1	p_2	…	p_n

Математическое ожидание $M[R_i]$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\overline{R}_i$: $\overline{R}_i = M[R_i] = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$ .. Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск: $\min\limits_i \overline{R}_i = \min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$.

Пример 2.7. Исходные данные те же, что и в примере 2.6. Определить, при каком варианте решения достигается наименьший средний ожидаемый риск, и найти величину минимального среднего ожидаемого риска (проигрыша).

Решение. Для каждого i-го варианта решения найдем величину среднего ожидаемого риска. На основе заданной матрицы риска R найдем: $\overline{R}_1$ = 1/2*3+1/6*3+1/6*0+1/6*8=20/6, $\overline{R}_2$ = 4, $\overline{R}_3$ = 7/6, $\overline{R}_4$ = 32/6.

Следовательно, минимальный средний ожидаемый риск равен 7/6 и соответствует третьему решению: $\min_i \overline{R}_i = \overline{R}_i$ = 7/6.

Замечание. Когда говорят о среднем ожидаемом доходе (выигрыше) или о среднем ожидаемом риске (проигрыше), то подразумевают возможность многократного повторения процесса принятия решения по описанной схеме или фактическое неоднократное повторение такого процесса в прошлом. Условность данного предположения заключается в том, что реально требуемого количества таких повторений может и не быть.

Критерий (правило) Лаплпаса равновозможности (безразличия). Этот критерий непосредственно не относится к случаю частичной неопределеннос-ти, и его применяют в условиях полной неопределенности. Однако здесь предполагается, что все состояния среды (все варианты реальной ситуации) равновероятны – отсюда и название критерия. Тогда описанные выше схемы расчета можно применить, считая вероятности p_j одинаковыми для всех вариантов реальной ситуации и равными 1/n. Так, при использовании критерия максимизации среднего ожидаемого дохода выбирается решение, при котором достигается $\max_i \overline{Q}_i = \max_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}$. А в соответсвии с критерием минимизации среднего ожидаемого риска выбирается вариант решения, для которого обеспечивается $\min_i \overline{R}_i = \min_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$.

Пример 2.8. Используя критерий Лапласа равновозможности для исходных данных примера 2.1, выбрать наилучший вариант решения на основе: а) правила максимизации среднего ожидаемого дохода; б) правила минимизации среднего ожидаемого риска.

Решение. а) С учетом равновероятности вариантов реальной ситуации величины среднего ожидаемого дохода для каждого из вариантов решения составляют $\overline{Q}_1$= (5+2+8+4)/4=19/4, $\overline{Q}_2$ = 21/4, $\overline{Q}_3$= 26/4, $\overline{Q}_4$= 15/4. Следовательно, наилучшим вариантом решения будет третий, и максимальный средний ожидаемый доход буде равен 26/4.

б) Для каждого варианта решения рассчитаем величины среднего ожидаемого риска на основе матрицы рисков с учетом равновероятности вариантов ситуации: $\overline{R}_1$ = (3+3+0+8)/4 = 14/4, $\overline{R}_2$ = 3, $\overline{R}_3$ = 7/4, $\overline{R}_4$ = 18/4. Отсюда следует, что наилучшим будет третий вариант, и при этом минимальный средний ожидаемый риск составит 7/4.

2.4. Оптимальность по Парето двухкритериальных финансовых операций в условиях неопределенности

Из рассмотренного выше следует, что каждое решение (финансовая операция) имеет две характеристики, которые нуждаются в оптимизации: средний ожидаемый

доход и средний ожидаемый риск. Таким образом, выбор наилучшего решения является оптимизационной двухкритериальной задачей. В задачах многокритериальной оптимизации основным понятием является понятие ***оптимальности по Парето*** [1]. Рассмотрим это понятие для финансовых операций с двумя указанными характеристиками.

Пусть каждая операция *a* имеет две числовые характеристики *E(a), r(a)* (например, эффективность и риск); при оптимизации *E* стремятся увеличить, а *r* уменьшить.

Существует несколько способов постановки таких оптимизационных задач. Рассмотрим такую задачу в общем виде. Пусть *A* — некоторое множество операций, и разные операции обязательно различаются хотя бы одной характеристикой. При выборе наилучшей операции желательно, чтобы *E* было больше, а r меньше.

Будем говорить, что операция *a* ***доминирует*** операцию *b,* и обозначать *a* > *b,* если $E(a) \geq E(b)$ и $r(a) \leq r(b)$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое. При этом операция *a* называется ***доминирующей,*** а операция *b* – ***доминируемой.*** Очевидно, что никакая доминируемая операция не может быть признана наилучшей. Следовательно, наилучшую операцию надо искать среди недоминируемых операций. Множество недоминируемых операций называется ***множеством (областью) Парето*** или ***множеством оптимальности по Парето*** [2].

Для множества Парето справедливо утверждение: каждая из характеристик *E, r* является однозначной функцией другой, т.е. на множестве Парето по одной характеристике операции можно однозначно определить другую.

Вернемся к анализу финансовых решений в условиях частичной неопределенности. Как показано в разделе 2.3, каждая операция характеризуется средним ожидаемым риском $\overline{R}$ и средним ожидаемым доходом $\overline{Q}$. Если ввести прямоугольную систему координат, на оси абсцисс которой откладывать значения $\overline{R}$, а на оси ординат – значения $\overline{Q}$, то каждой операции будет соответствовать точка $(\overline{R}, \overline{Q})$ на координатной плоскости. Чем выше эта точка на плоскости, тем доходнее операция; чем правее точка, тем более рисковая операция. Следовательно, при поиске недоминируемых операций (множества Парето) нужно выбирать точки выше и левее. Таким образом, множество Парето для исходных данных примеров 2.6 и 2.7 состоит только из одной третьей операции.

Для определения лучшей операции в ряде случаев можно применять некоторую *взвешивающую формулу,* в которую характеристики $\overline{R}$ и $\overline{Q}$ входят с определенными весами, и которая дает одно число, задающее лучшую операцию. Пусть, например, для операции *i* с характеристиками $(\overline{R}_i, \overline{Q}_i)$ взвешивающая формула имеет вид $f(i) = 3\overline{Q}_i - 2\overline{R}_i$, и наилучшая операция выбирается по максимуму величины *f(i).* Эта взвешивающая формула означает, что ЛПР согласен на увеличение риска на три единицы, если доход операции увеличится при этом не менее, чем на две единицы. Таким образом, взвешивающая формула выражает отношение ЛПР к показателям дохода и риска.

Пример 2.9. Пусть исходные данные те же, что и в примерах 2.6 и 2.7, т.е. для матриц последствий и риска примера 2.1 известны вероятности вариантов развития реальной ситуации: $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = 1/6$, $p_4 = 1/6$. В этих условиях ЛПР согласен на

---

[1] Критерий оптимальности итальянского экономиста В.Парето применяется при решении многокритериальных задач, в которых оптимизация означает улучшение одних показателей при условии, что другие при этом не ухудшаются.

[2] Множеством, или областью Парето в общем случае называют множество всех допустимых решений, для которых невозможно одновременно улучшить все частные показатели эффективности в задачах многокритериальной оптимизации, т.е. невозможно улучшить хотя бы один из них, не ухудшая остальных. Принадлежащие множеству Парето решения называются ***эффективными,*** или ***оптимальными по Парето***.

увеличение риска на две единицы, если при этом доход операции увеличится не менее, чем на одну единицу. Определить для этого случая наилучшую операцию.

Решение. Взвешивающая формула имеет вид $f(i) = 2\overline{Q_i} - \overline{R_i}$. Используя результаты расчетов в примерах 2.6 и 2.7, находим:

$f(1) = 2*29/6 - 20/6 = 6{,}33$; $f(2) = 2*25/6 - 4 = 4{,}33$;

$f(3) = 2*7 - 7/6 = 12{,}83$; $f(4) = 2*17/6 - 32/6 = 0{,}33$

Следовательно, лучшей является третья операция, а худшей – четвертая.