

Лекция 2. Кинематика механизмов

2.1 Задачи кинематики механизмов

Кинематика – раздел механики, изучающий движение без учета причин, вызывающих движение. По своему содержанию она является геометрией движущихся тел. Для характеристики движения используются **кинематические параметры: перемещение, скорость и ускорение**. Соответственно различают задачи о положениях, о скоростях, об ускорениях. Наибольшую сложность представляет задача о положениях механизма, несмотря на то, что она чисто геометрическая. Именно сложность решения этой задачи определяет основные трудности при изучении механики машин. Решение указанных задач необходимо для последующего полного исследования механизма. Кинематика представляет важнейшую часть механики машин и в простейших случаях при первоначальном изучении машин можно ограничиться только кинематикой.

Кинематика механизмов в настоящее время изучена достаточно хорошо. Все существующие **методы можно разделить на: графические и аналитические**. **Графические методы** характеризуются простотой реализации и наглядностью, однако недостаточно точны. Они находят применение на начальных стадиях исследования или для контроля правильности результатов, полученных другими методами. Основным методом для решения инженерных задач является **аналитический метод**. Он находит широкое применение благодаря распространению вычислительной техники. Метод позволяет получить обширную и точную информацию.

В настоящем разделе изучаются графические методы: метод планов и метод кинематических диаграмм, находящие применение в курсовом проектировании. Все методы относятся к механизмам 2-го класса.

2.2 План положений механизма

План положений механизма представляет графическое изображение механизма с соблюдением масштаба при заданных значениях обобщенных координат.

Всякое графическое построение начинается с выбора масштабного коэффициента. **Масштабный коэффициент** – это отношение истинного значения параметра к длине отрезка, изображающего его на чертеже. Истинное значение параметра берется в свойственных ему единицах измерения, а длина отрезка – в миллиметрах. Здесь используются масштабные коэффициенты длин k_l , скоростей k_v , ускорений k_a . Если, например, обозначить длину кривошипа l_{OA} , скорость точки A – v_A , ускорение точки A – a_A , а длины отрезков их изображающие на чертеже OA , pa , πa , то

$$k_l = L_{OA} / OA, k_v = V_a / pa, k_a = a_a / \pi a$$

Построение плана положений методом засечек производится в следующей последовательности:

1. Наносятся неподвижные точки механизма.
2. Строится положение начального звена OA , соответствующее заданной обобщенной координате.
3. Строятся линии возможных положений точек или звеньев механизма (дуги радиусов BA и BC).
4. Точки пересечения линий соединяются с другими точками механизма (линии BA и BC).

Задаваясь разными значениями обобщенной координаты φ , строится план положений механизма. Если соединить одноименные точки в разных положениях механизма плавной кривой, получим их **траектории** – линии движения точек. Точки на шатуне дают «**шатунные кривые**», отличающиеся чрезвычайным разнообразием при различных размерах механизма.

2.3 Основные кинематические соотношения

Напомним основные кинематические соотношения, известные из курса теоретической механики. Они лежат в основе построения планов скоростей и планов ускорений.

Плоским или плоскопараллельным называется движение, при котором векторы скоростей и ускорений всех точек параллельны одной плоскости.

Поступательным называется движение, при котором траектории, скорости и ускорения всех точек этого тела одинаковы и тело движется без поворота.

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_A = V_B, a_1 = a_2 = a_3 = a_A = a_B$$

Частный случай поступательного движения – **прямолинейное движение**. Траектории точек в этом случае прямые линии. Такое движение, например, совершает ползун относительно стойки, камень относительно кулисы. Другой частный случай – **круговое поступательное движение**. Здесь траектории всех точек – окружности. Так движется шатун шарнирного параллелограмма.

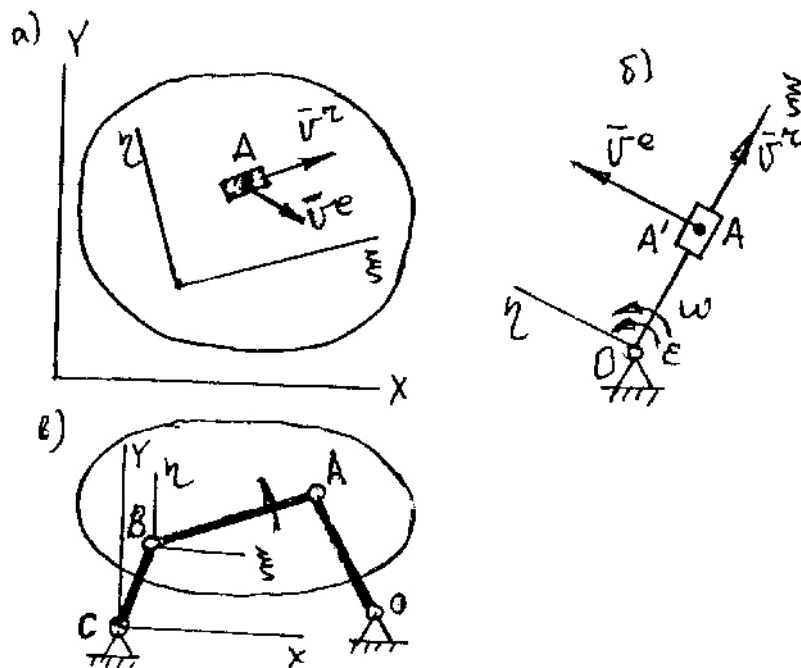
Вращательным называется движение, при котором одна точка тела неподвижна относительно выбранной системы отсчета. Для скорости и ускорения точки во вращательном движении установлены следующие соотношения:

$$v_A = \omega L_{OA}, a_A^n = a_A^n + a_A^\tau;$$
$$a_A^n = \omega^2 L_{OA}, a_A^\tau = \varepsilon L_{OA}, a_A^n = \omega^2 L_{OA};$$

Направление скорости перпендикулярно радиус-вектору точки A и направлено в сторону угловой скорости ω . Нормальное ускорение направлено к неподвижной точке, центру вращения, касательное ускорение перпендикулярно нормальному ускорению и направлено в сторону углового ускорения ε .

Сложным называется движение, которое является результатом сложения переносного и относительного движения. Скорость точки в сложном движении определяется на основании **теоремы о сложении скоростей**: *скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скорости*

$$V_A = V^E + V^R$$



Под переносной скоростью понимается скорость той точки переносной системы, которая лежит под точкой A . Такая точка отмечается штрихом (A'). Точка A' движется вместе с переносной системой.

Под относительной скоростью понимается скорость точки A относительно точки A' . На основании введенных определений вышеприведенную формулу можно записать так:

$$v_A = v_{A'} + v_{AA'}$$

Ускорение, в сложном движении определяется на основании **теоремы о сложении ускорений (теоремы Кориолиса)**:

Ускорение точки равно геометрической сумме переносного ускорения, относительного ускорения и кориолисова ускорения, называемого также поворотным или добавочным

$$a_A = a^E + a^R + a^K$$

Под переносным ускорением понимается ускорение точки A' , **под относительным** — ускорение точки A относительно точки A' . Тогда формулу для ускорения можно представить так

$$a_A = a_{A'} + a_{AA'} + a^K$$

Кориолисово ускорение вызвано с одной стороны изменением направления вектора относительной скорости из-за поворота переносной системы, с другой – изменением величины вектора переносной скорости из-за перемещения точки A' в результате относительного движения. Величина кориолисова ускорения для плоского движения определяется по формуле:

$$a^k = 2 \omega V_{AA'}$$

где ω - угловая скорость переносной системы

Из формулы следует, что $a^k = 0$, если $\omega = 0$ или $V_{AA'} = 0$.

Направление кориолисова ускорения находится по правилу Жуковского: вектор относительной скорости $V_{AA'}$ следует повернуть на 90° в сторону вращения переносной системы.

Приведенные выше формулы находят применение при анализе сложного движения кулисного камня. Переносное движение осуществляет кулиса; относительное движение есть прямолинейное движение камня по направляющей кулисы.

В частном случае, когда переносное движение поступательное, а относительное – вращательное, формулы упрощаются. В силу свойств поступательного движения $V_A = V_B$, $a_A = a_B$, кроме того $a^k = 0$, тогда

$$V_A = V_B + V_{AB}$$

$$a_A = a_B + a_{AB}$$

Скорость точки равна геометрической сумме скорости полюса и скорости движения относительно полюса, аналогичные утверждения можно сделать и для ускорения.

Приведённые формулы применяются только в том случае, когда можно указать полюс относительного вращательного движения. Например, в шарнирном четырехзвеннике движение точки A можно рассматривать состоящим из движения полюса (точки B) и относительного движения точки A вокруг точки B .

2.4 Метод планов скоростей и ускорений. План скоростей шарнирного четырехзвенника

Планом скоростей звена называется плоский пучок векторов, изображающих в масштабе абсолютные скорости точек звена; отрезки, составляющие концы векторов изображают относительные скорости точек. Совокупность планов скоростей звеньев с общим полюсом называется **планом скоростей механизма**.

Для построения плана скоростей определяется скорость характерной точки входного звена, в случае, если входное звено - кривошип, по формуле

$$V_A = \omega_1 L_{OA}$$

Выбирается масштабный коэффициент плана скоростей k_v , и изображается скорость точки A в масштабе лучом pa , проведенным из полюса p в направлении скорости. Полюс – точка, из которой начинаются векторы абсолютных скоростей всех точек механизма. Положение полюса

выбирается произвольно в удобном месте для построения плана. Для определения скорости точки **B** запишем векторное уравнение.

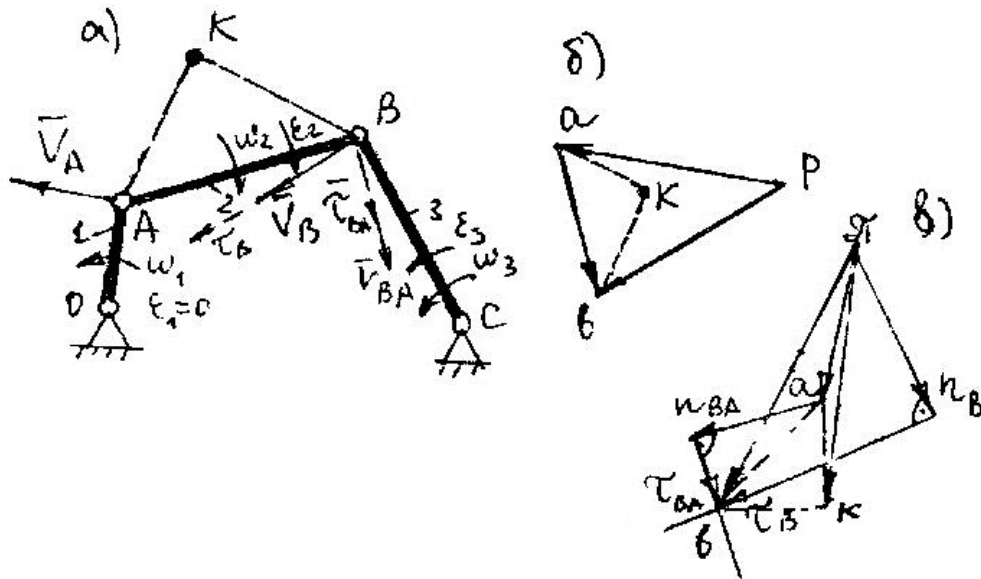


Рис.2.2

$V_B = V_A + V_{BA}$ В этом уравнении две неизвестных: величина скорости V_{BA} и величина скорости V_B . Такое векторное уравнение решается, т.к. оно эквивалентно двум скалярным уравнениям с двумя неизвестными. На рис.2.2 представлено графическое решение векторного уравнения (2.4). Полученное построение представляет план скоростей, т.к. соответствует приведенному выше определению.

План скоростей обладает рядом свойств:

- 1 (Свойство подобия). Фигура на плане скоростей, образованная векторами относительных скоростей, подобна и сходственно расположена по отношению к фигуре на звене, образованной соответствующими точками. Свойство подобия позволяет найти скорость любой точки звена, если известны скорости двух точек этого звена.
- 2 По плану скоростей можно найти угловую скорость звена. Для этого следует воспользоваться соотношениями, например, такого вида:

$$\omega_2 = V_{BA}/L_{BA} = \mu_{\nu} ba/L_{BA}$$

Направление угловой скорости определится, если перенести вектор относительной скорости в соответствующую точку звена. Направление относительной скорости показывает направление угловой скорости.

2.5 План ускорений шарнирного четырехзвенника

Планом ускорений звена называется плоский пучок лучей, изображающих в масштабе абсолютные ускорения точек звена. Отрезки, соединяющие концы этих лучей изображают относительные ускорения. Совокупность планов ускорений звеньев образуют **план ускорений механизма**.

Ускорение точки А складывается из касательного и нормального ускорения, определяемых по формулам $\mathbf{a}_A^n = \omega_1^2 \mathbf{L}_{OA}$ и $\mathbf{a}_A^\tau = \varepsilon_1 \mathbf{L}_{OA}$. Из полюса π отложим отрезки $\mathbf{p}_A$ и $\mathbf{t}_A$, изображающие в масштабе $\mathbf{a}_A^n$ и $\mathbf{a}_A^\tau$. Для точки В запишем уравнение

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} \\ \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^\tau &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^\tau\end{aligned}$$

В этом уравнении неизвестны только величины касательных ускорений $\mathbf{a}_B^\tau$ и $\mathbf{a}_{BA}^\tau$. Нормальные ускорения определяются по формулам $\mathbf{a}_B^n = \omega_3^2 \mathbf{L}_{BC}$, $\mathbf{a}_{BA}^n = \omega_2^2 \mathbf{L}_{BA}$. Угловые скорости ω_3 и ω_2 находятся на основании построенного ранее плана скоростей. Из конца вектора $\mathbf{t}_A$ откладывается вектор $\mathbf{n}_{BA}$, а затем через его конец проводится линия направления вектора $\mathbf{t}_{BA}$. Из полюса π откладывается вектор $\mathbf{n}_B$ и затем через его конец проводится линия направления вектора $\mathbf{t}_B$. Пересечение линий $\mathbf{t}_{BA}$ и $\mathbf{t}_B$ определит точку $\mathbf{b}$. Выполненное построение является графическим решением векторного уравнения.

Свойства плана ускорений.

1. **Свойство подобия, Фигура на плане ускорений, образованная векторами относительных ускорений, подобна и сходственно расположена по отношению к фигуре на звене, образованной соответствующим точками.**
2. **По плану ускорений можно найти угловое ускорение звена. Для этого следует воспользоваться известными соотношениями между касательным и угловым ускорениями. Например, для звена 2**

$$\varepsilon_2 = \mathbf{a}_{BA}^\tau / \mathbf{L}_{BA} = k_a \mathbf{t}_{BA} / \mathbf{L}_{BA}$$

Для определения направления ε_2 следует перенести $\mathbf{a}_{BA}^\tau$ в точку В. Направление касательного ускорения показывает направление углового ускорения. Кривошипно-шатунный механизм можно рассматривать как частный случай шарнирного четырехзвенника, у которого коромысло имеет бесконечно большую длину, вследствие чего траектория движения точки В – прямая линия. Планы скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма строятся аналогично, но несколько проще.

2.6 Планы скоростей и ускорений кулисного механизма

Построение плана скоростей кулисного механизма (рис.2.3) начинается со скорости точки А. Движение точки А можно рассматривать как

сложное, происходящее за счет переносного вместе с кулисой 3 и относительного за счет движения камня по кулисе. Тогда справедливо следующее уравнение:

$$V_A = V_A + V_{AA'}$$

Где A' - точка, принадлежащая переносной системе, кулисе, лежащая под точкой A . В этом уравнении неизвестны величины векторов V_A и $V_{AA'}$. Направление вектора V_A - перпендикулярно кулисе, направление вектора $V_{AA'}$ - вдоль кулисы. Графическое решение векторного уравнения представлено на рис.2.6. Скорость точки D находится на основании свойства подобия, которое в данном случае выражается в пропорции

$$CD/CA = pd/pa, \text{ откуда } pd = (CD/CA)pa$$

Для ускорения точки A в сложном движении следует записать уравнение:

$$a_A = a_{A'} + a_{AA'} + a^K = a_A^n + a_A^\tau + a_{AA'} + a^K$$

$$\text{В этом уравнении } a_A^n = \omega_3^2 L_{AC}, a_K = 2\omega_3 V_{AA'}$$

Кроме того известны направления всех векторов, неизвестны величины векторов a_A^τ , $a_{AA'}$.

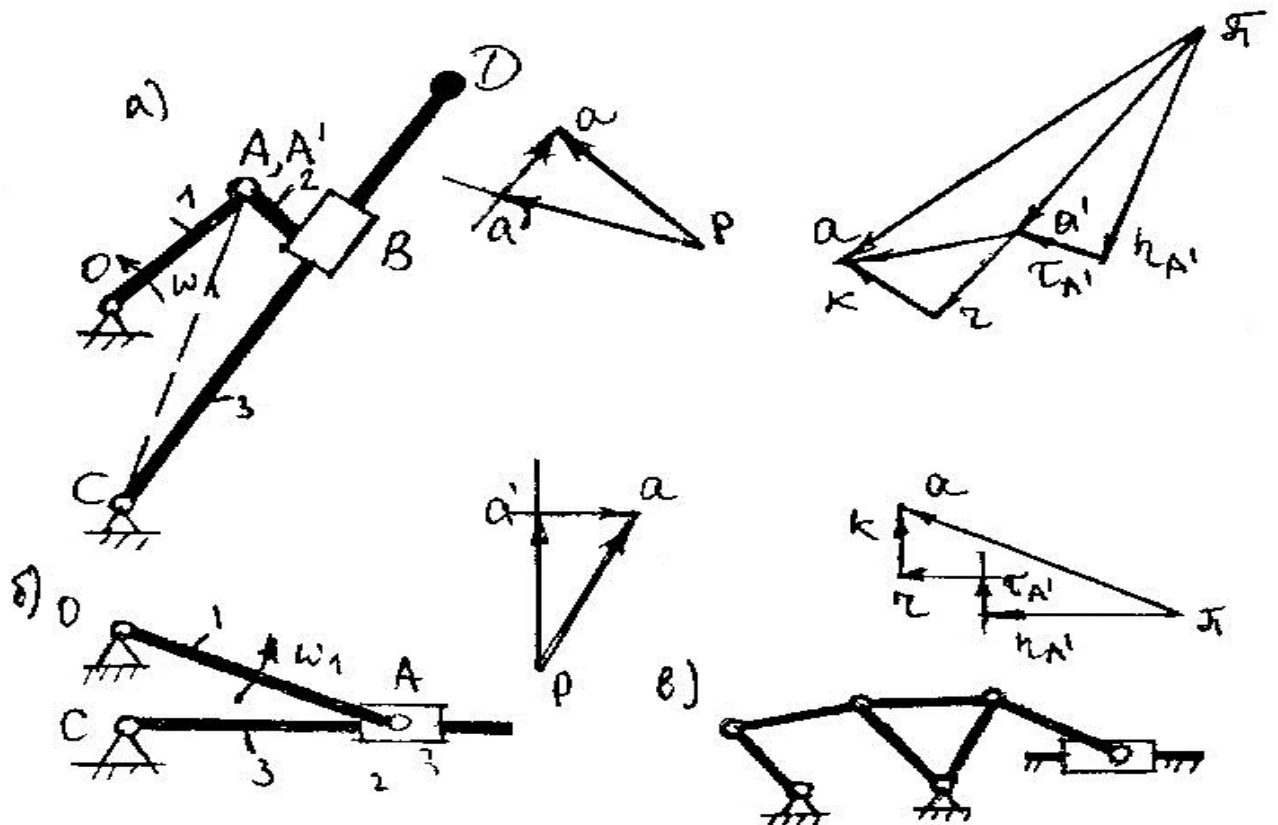


Рис.2.3

Построение плана ускорений производится в следующем порядке. Из полюса π откладывается вектор πa , изображающий ускорение точки A . Затем из полюса строится вектор π_A , а из его конца – линия направления вектора τ_A . Поскольку пока неизвестно из какой точки следует строить вектор относительного ускорения $r_{AA'}$ перейдем к построению кориолисова

ускорения. Вектор k , изображающий a^k на плане ускорений, замыкает построение, приходя в точку a . Исходя из этого, находится начало вектора k . Через эту точку проводится линия направления вектора относительного ускорения. Пересечение линий r_{AA} и τ_A определяет точку a . План ускорений кулисного механизма построен.

Планы скоростей и ускорений кулисного механизма с вращающейся кулисой строятся подобным же образом.

Многочленные рычажные механизмы 2-го класса можно рассматривать как комбинации простейших четырехзвенных механизмов. Поэтому приведенных примеров достаточно для графического исследования большинства применяемых механизмов.

2.7 Метод кинематических диаграмм

Второй рассматриваемый графический метод – *метод кинематических диаграмм*, отличается простотой реализации, хорошо

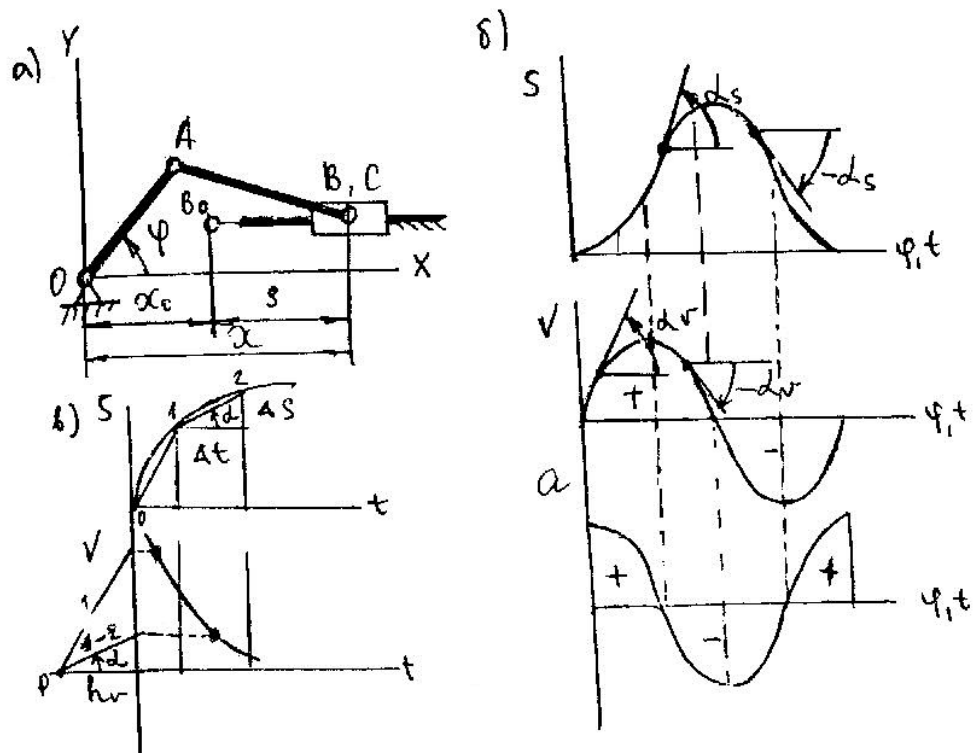


Рис.2.7

иллюстрирует связь между кинематическими параметрами, однако дает низкую точность результатов. Рассмотрим его на примере кривошипно-ползунного механизма (рис.2.7).

Положение точки B при заданном значении обобщенной координаты определяется координатой x . Если обозначить координату точки B в крайнем положении механизма x_0 , то ее перемещение $S_B = x - x_0$. Перемещение представляет функцию угла φ . Задаваясь значениями этого угла, по планам положений механизма определим перемещения S и построим график $S(\varphi)$. Поскольку $\varphi = \omega t$, ось φ можно считать осью t и, следовательно, полученный

график есть график $S(t)$. Согласно определению скорости и графическому смыслу производной имеем:

$$V = dS/dt = \operatorname{tg} \alpha_s k_v,$$

Где α_s – угол наклона касательной к графику $S(t)$. Отсюда следует способ построения графика $V(t)$: проводятся касательные в выбранных точках графика $S(t)$, измеряются углы наклона α_s , вычисляются тангенсы этих углов. Аналогичным образом находится ускорение:

$$a = dV/dt = \operatorname{tg} \alpha_v k_a$$

Между графиками $S(t)$, $V(t)$, $a(t)$ существует связь, как между интегральными и дифференциальными кривыми:

- 1. Экстремуму интегральной кривой соответствует ноль на дифференциальной кривой.**
- 2. Точке перегиба интегральной кривой соответствует экстремум дифференциальной кривой.**
- 3. Возрастающим значениям интегральной кривой соответствуют положительные значения дифференциальной кривой, убывающим – отрицательные значения.**
- 4. Непосредственное применение указанного способа построения графиков не практикуется из-за сложности точного построения касательных. Обычно используется его модификация, носящая название метод хорд: касательные, проведенные в точках, лежащих на серединах выбранных участков, заменяются хордами этих участков.**

Выбрав полюсное расстояние h и отложив его влево от оси ординат графика дифференциальной кривой, получим полюс p . Из этого полюса строятся лучи параллельные хордам участков интегральной кривой. Отрезки, отсекаемые этими лучами на оси ординат, определяют значения производных для середин соответствующих участков, так как они пропорциональны тангенсам углов наклона касательных на серединах участков. Если масштабные коэффициенты по осям графика интегральной кривой известны, можно определить масштабные коэффициенты по осям графика дифференциальной кривой. Рассмотрим, например, графики $S(t)$ и $V(t)$. Очевидно, что:

$$V = y_v k_v = \Delta S k_s / \Delta t k_t$$

Из подобия треугольников следует:

$$\Delta S / \Delta t = y_v / k_v$$

откуда после подстановки следует:

$$k_v = k_s / h_v k_t$$

Аналогичным образом выводится формула:

$$k_a = k_v / h_a k_t$$