КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривая линия - это множество точек пространства, координаты которых являются функциями одной переменной. ***Термин «кривая» в разных разделах математики определяется по-разному. В начертательной геометрии кривую рассматривают как траекторию, описанную движущей точкой, как проекцию другой кривой, как линию пересечения двух поверхностей, как множество точек, обладающих каким-либо общим для всех их свойством и т.д.***

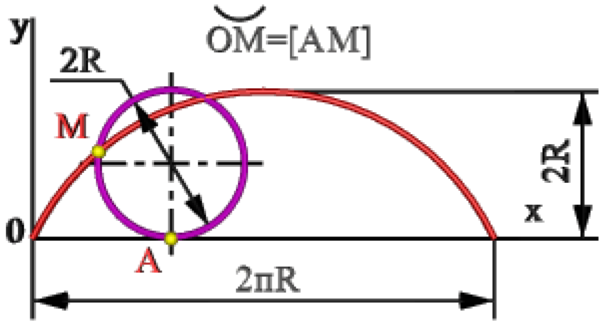


Рисунок 8.1 Циклоида

Например, (рис.8.1) ***циклоида*** – траектория движения точки окружности, катящейся без скольжения по прямой линии. Эта кривая состоит их ряда «арок», каждая из которых соответствует полному обороту окружности.

Кривые линии, все точки которых принадлежат одной плоскости, называются ***плоскими***, остальные пространственными.

Каждая кривая включает в себя геометрические элементы, которые составляют её ***определитель***, т.е. совокупность независимых условий, однозначно определяющих эту кривую.

Различны и способы задания кривых:

- **Аналитический** – кривая задана математическим уравнением;
- **Графический** – кривая задана визуально на носителе графической информации;
- **Табличный** – кривая задана координатами последовательного ряда точек.

Уравнением кривой линии называется такое соотношение между переменными, которому удовлетворяют координаты точки, принадлежащей кривой.

В основу классификации кривых положена природа их уравнений.

Кривые подразделяются на ***алгебраические*** и ***трансцендентные*** в зависимости от того, являются ли их уравнения алгебраическими или трансцендентными в прямоугольной системе координат.

Плоская кривая линия называется ***алгебраической***, если её уравнение $\boldsymbol{f(xy)=0}$. Функция $\boldsymbol{f(xy)}$ является степенным множителем относительно переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$; в остальных случаях кривая называется трансцендентной.

Кривая линия, представленная в декартовых координатах уравнением $\boldsymbol{n}$- й степени, называется алгебраической кривой $\boldsymbol{n}$-го порядка.

Порядок плоской алгебраической кривой линии определяется наибольшим числом точек её пересечения прямой линией. Любая прямая линия может пересекать алгебраическую кривую линию $\boldsymbol{n}$-го порядка не более чем в $\boldsymbol{n}$ точках.

Рассмотрим несколько примеров алгебраической кривой линии:

1. ***Парабола*** – кривая второго порядка, прямая пересекает ее в двух точках (рис.7.2). При этом парабола может быть определена как:

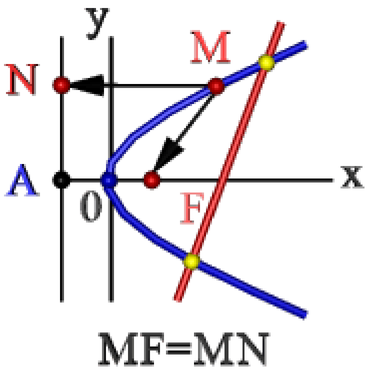


Рисунок 8.2. Парабола

-множество точек ***M***(***xy***) плоскости, расстояние ***FM*** которых до определенной точки ***F*** этой плоскости (фокуса параболы) равно расстоянию ***MN*** до определенной прямой ***AN*** - директрисы параболы;

-линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и параллельная какой либо касательной плоскости этого конуса;

-в прямоугольной системе координат ***0xy*** с началом в вершине параболы и осью ***0x*** направленной по оси параболы уравнение параболы имеет так называемый канонический вид

$$y^2=2px,$$

где ***p*** (фокальный параметр) - расстояние от фокуса до директрисы.

2. ***Гипербола*** :

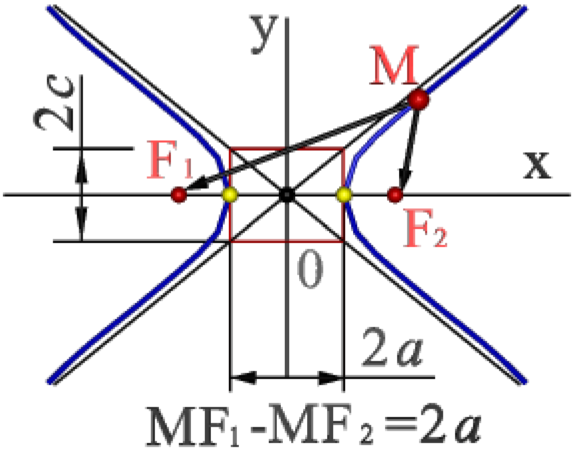


Рисунок 8.3. Гипербола

- множество точек ***M*** плоскости (рис.7.3) разность (по абсолютной величине) расстояний F_1M и F_2M которых до двух определенных точек F_1 и F_2 этой плоскости (фокусов гиперболы) постоянна:

$$F_1M - F_2M=2a<2c$$

Середина ***0*** отрезка F_1F_2 (фокусного расстояния) называется центром гиперболы;

- линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающая обе его полости;

- в прямоугольной системе координат ***0xy*** с началом в центре гиперболы, на оси ***0x*** которой лежат фокусы гиперболы уравнение гиперболы имеет так называемый канонический

$$x^2/a^2 - y^2/в^2=1,\ в^2=c^2 - a^2,$$

где ***a*** и ***в*** длинны полуосей гиперболы.

3. ***Эллипс*** :

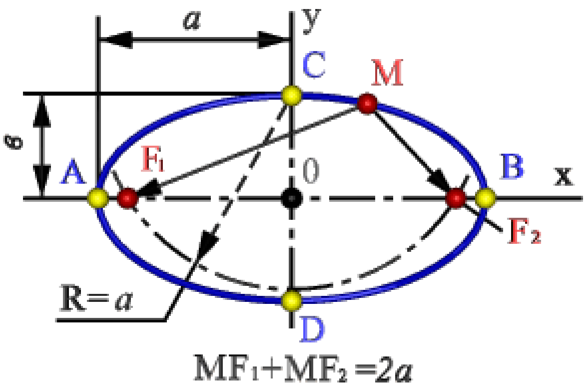


Рисунок 8.4. Эллипс

- множество точек ***M*** плоскости (рис.7.4), сумма расстояний MF_1 и MF_2 которых до двух определенных точек F_1 и F_2 (фокусов эллипса) постоянна

$$MF_1+MF_2=2a.$$

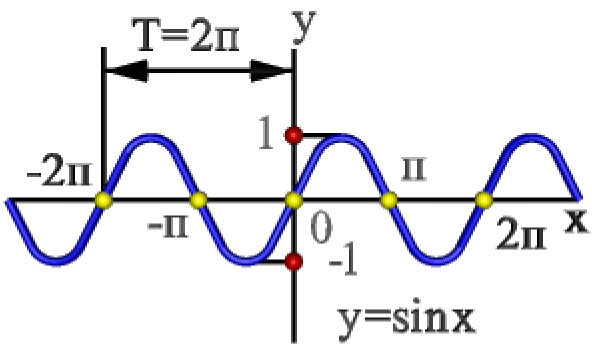


Рисунок 8.5. Синусоида

Середина ***0*** отрезка F_1F_2 (фокусного расстояния)называется центром эллипса;

- линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающей все прямолинейные образующие одной полости этого конуса;

- в прямоугольной системе координат ***0xy*** с началом в центре эллипса, на оси ***0x*** которой лежат фокусы эллипса уравнение эллипса имеет следующий вид

$$x^2/a^2+y^2/в^2=1,$$

где ***а*** и ***в*** - длинны большой и малой полуосей эллипса. При ***а=в*** фокусы F_1 и F_2 совпадают и указанное уравнение определяет окружность, которая рассматривается как частный случай эллипса.

Рассмотренные плоские кривые линии, получаемые при пересечении поверхности прямого кругового конуса плоскостями, различно расположенными по отношению к оси конуса, называют ***кривыми конических сечений***.

Трансцендентные кривые в отличие от алгебраических могут иметь бесконечное количество точек пересечения с прямой, точек перегиба, вершин и т.п.

Синусоида - трансцендентная плоская кривая линия (рис.8.5), получающаяся в результате двойного равномерного движения точки - поступательного и возвратно-поступательного в направлении, перпендикулярном первому.

Синусоида - график функции ***y*=sin *x***, непрерывная кривая линия с периодом ***T*=2п**.

Наряду с этим у трансцендентных кривых могут быть характерные точки, которых не существует у алгебраических кривых: точки прекращения, угловые точки (точки излома), асимптотические точки. Простейшими примерами трансцендентных кривых служат графики функций логарифмической, показательной тригонометрической, а также все спирали, циклоиды и т.п.

Кривая линия как траектория движущейся точки должна быть непрерывной. Движущаяся точка в любом положении должна иметь определенное направление движения. Это направление указывает прямая (касательная), проходящая через рассматриваемую точку.

Длина отрезка кривой линии определяется в общем случае, как сумма длин отрезков вписанной в нее ломаной линии, с заданной точностью передающей форму кривой.

Особый интерес представляют окружность и цилиндрическая винтовая линии, каждая из которых является эталоном соответственно плоских и пространственных кривых линий.

В практике конструирования линий и поверхностей широко используются ***обводы***. Это кривые, составленные из дуг различных кривых, определенных парами смежных точек. Обводом ряда точек плоскости является плоская кривая, пространства - пространственная. Точки стыка дуг называются узлами. Обвод заданный координатами своих точек называется дискретным. Обвод называется гладким, если дуги обвода в узлах имеют общие касательные.

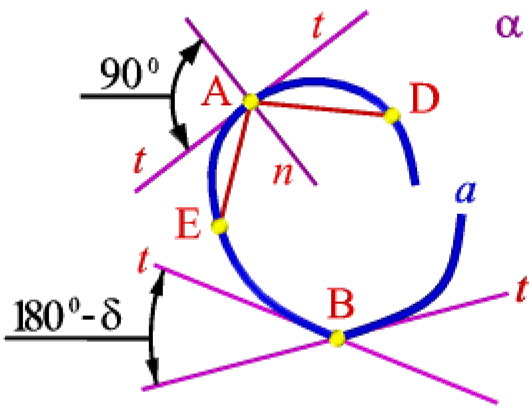


Рисунок 8.6. Касательные к кривой линии

Плоская кривая ***a*** построена в плоскости ***α*** (рис.8.6). Через точку ***A*** проведены секущие хорды ***AE*** и ***AD***. Если точку ***E***приближать к точке ***A***, секущая ***AE***поворачивается вокруг точки ***A*. Когда** точка ***E*** совпадет с точкой ***A*** (***A≡E***) секущая ***AE***достигнет своего предельного положения ***t*.** В этом предельном положении секущая называется полукасательной к кривой ***a*** в точке ***A***. Секущая ***AD*** в предельном положении ***A≡D*** также представлена полукасательной ***t*.**

Кривая линия в точке ***A*** имеет две полукасательные прямые, которые совпадают и определяют одну касательную к кривой линии в точке ***A*** – кривая в этой точке называется плавной.

Кривая плавная во всех её точках называется ***плавной кривой линией***.

Нормалью n в точке ***A*** кривой линии называется перпендикуляр к касательной.

На кривой линии могут быть точки где разнонаправленные полукасательные не принадлежат одной прямой, а составляют между собой угол. Так на кривой ***a*** в точке ***B*** угол ***δ***между полукасательными не равен $\boldsymbol{180^0}$. Точка ***B*** в этом случае называется точкой излома или выпадающей точкой.

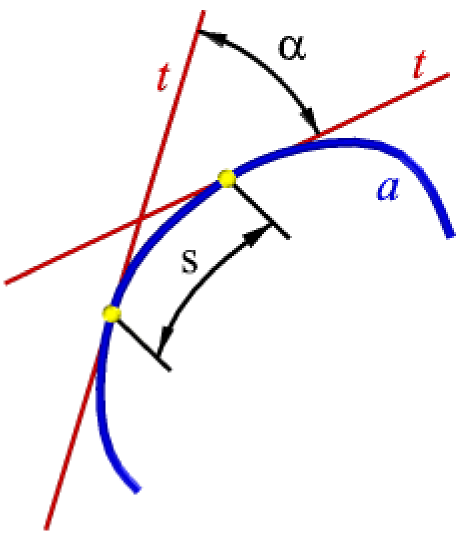


Рисунок 7.7. Кривая линия как траектория движения точки

Плоскую кривую линию можно рассматривать как траекторию движения точки в плоскости (рис.8.7); точка движется по касательной к кривой линии, обкатывая эту кривую без скольжения.

Движение точки вдоль кривой ***a*** связано с непрерывным изменением двух величин: расстояния ***S***, на которое удалена точка от начального положения и угла ***α*** поворота касательной относительно начального положения.

Если с увеличением пути ***S*** непрерывно увеличивается и ***α***, кривая называется простой.

Угол ***α*** (угол смежности) между касательными в двух бесконечно близких точках кривой, отнесенный к длине дуги между этими точками, определяет степень искривленности кривой линии, т.е. определяет ***кривизну***кривой.

$k = \lim_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta S}$, предел отношения угла смежности касательных к соответствующей дуге.

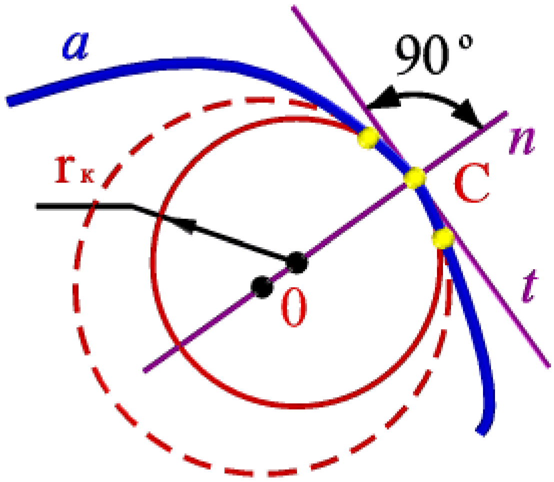


Рисунок 7.8. Кривизна кривой

Кривизна прямой в любой её точке равна нулю.

Кривизна произвольной кривой линии в различных точках различна, в отдельных точках она может быть равна нулю. Такие точки называются точками спрямления.

Кривизна в каждой из точек плоской кривой ***a*** определяется с помощью соприкасающейся в этой точке окружности (рис.8.8).

Соприкасающейся окружностью или кругом кривизны в данной точке называется предельное положение окружности, когда она проходит через данную точку и две другие бесконечно близкие к ней точки.

Центр соприкасающейся окружности называется ***центром кривизны кривой*** в данной точке, а радиус такой окружности – ***радиусом кривизны кривой линии*** в данной точке.

Множество центров кривизны кривой является кривая линия- её называют ***эволютой*** данной кривой, а кривая по отношению к своей эволюте называется ***эвольвентой***.

Лекция №7-2

СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ КРИВОЙ ЛИНИИ

1. Проекцией кривой линии является кривая линия;
2. Касательная к кривой линии проецируется в касательную к её проекции;
3. Несобственная точка кривой проецируется в несобственную точку её проекции;
4. Порядок линии – проекции алгебраической кривой равен порядку самой кривой или меньше;
5. Число узловых точек (в которых кривая пересекает сама себя) проекции равно числу узловых точек самой кривой.

Случаи когда, плоская кривая проецируется в прямую (свойства 1,4,5), а касательная в точку (свойство 2) не учитываются.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

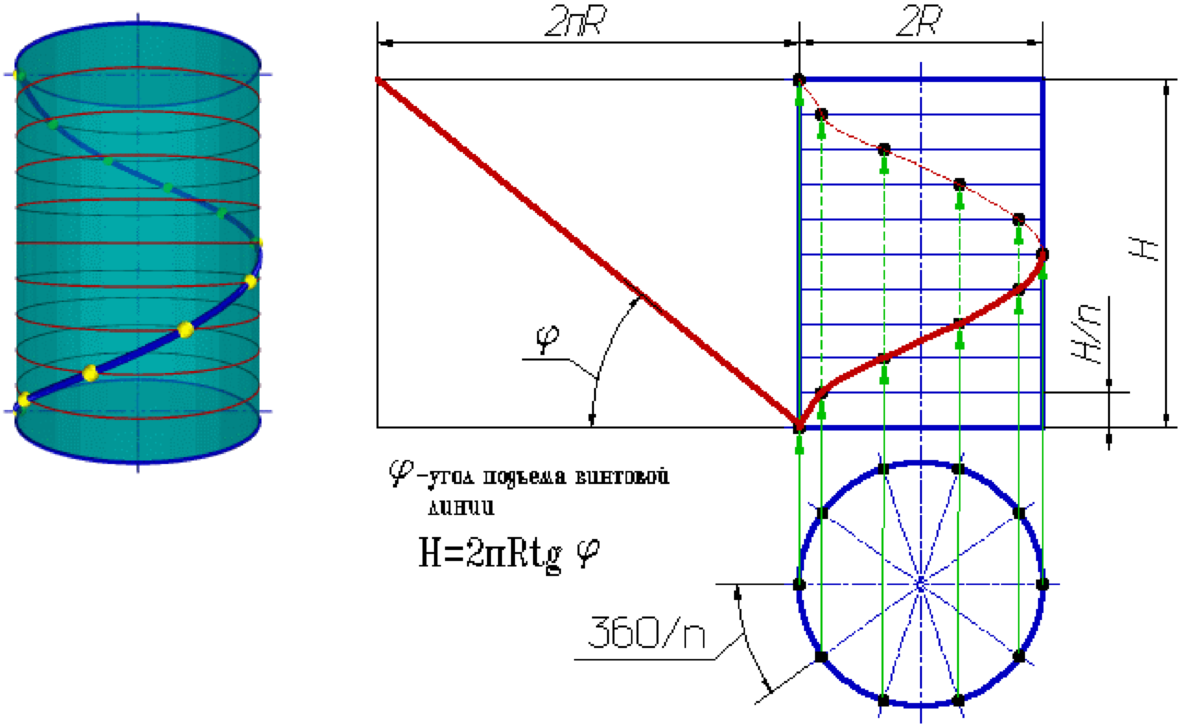
Пространственные кривые линии в начертательной геометрии обычно рассматриваются как результат пересечения поверхностей или траекторию движения точки.

Пространственную, так же как и плоскую, кривую линию на чертеже задают последовательным рядом точек.

Классическим примером пространственных кривых линий являются цилиндрическая и коническая винтовые линии.

Цилиндрическая винтовая линия.

Такую линию в пространстве описывает точка, которая движется по какой-либо образующей прямого кругового цилиндра, вращающегося вокруг своей оси так, что путь проходимый точкой по образующей пропорционален углу поворота цилиндра (рис. 7.9).



а) модель   б) эпюр

Рисунок 8.9. Цилиндрическая винтовая линия (правая)

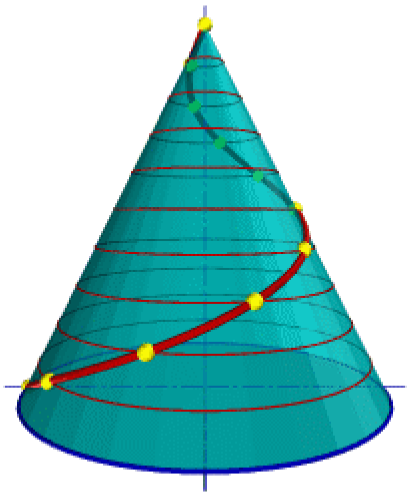
Смещение точки вдоль образующей за один оборот называется ***шагом*** цилиндрической винтовой линии.

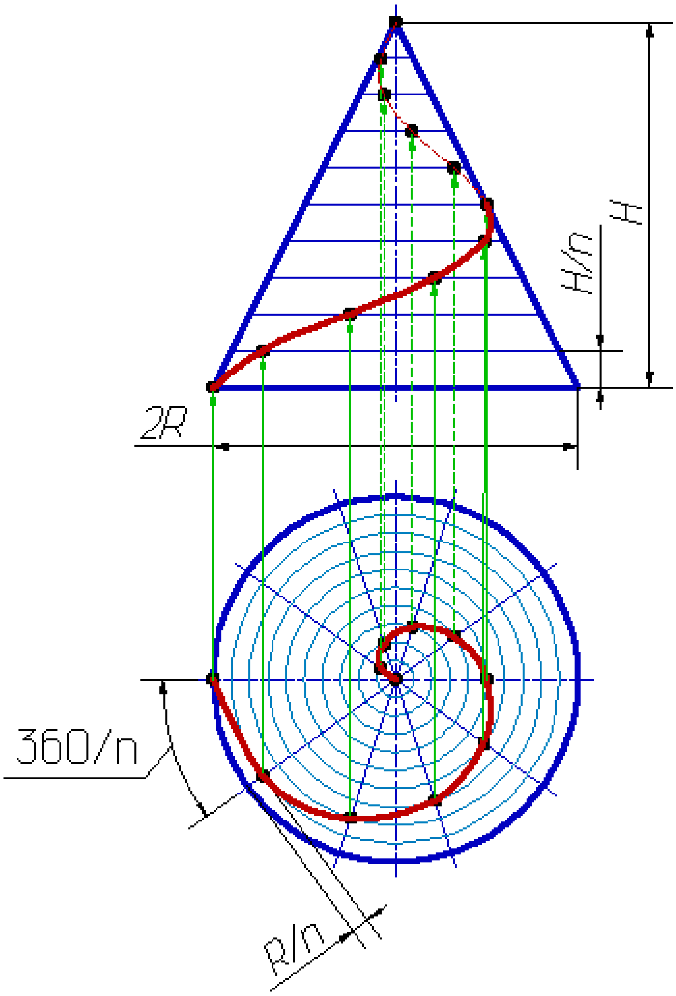
Различают правую и левую винтовые линии

Коническая винтовая линия.

Такую линию описывает точка, которая движется по какой-либо образующей прямого кругового конуса, вращающегося вокруг своей оси так, что путь пройденный точкой по образующей все время равен углу поворота конуса (рис.8.10).

Проекция на ось конуса смещения точки вдоль образующей за один оборот называется шагом конической винтовой линии. Горизонтальной проекцией конической винтовой линии является спираль Архимеда - одна из замечательных плоских кривых линий.





а) модель б) эпюр

Рисунок 8.10 Коническая винтовая линия

Поверхность. Формообразование поверхностей. Поверхности вращения. Винтовые поверхности. Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (Поверхности Каталана). Поверхности параллельного переноса.

ПОВЕРХНОСТЬ

"***Поверхность***, одно из основных геометрических понятий. При логическом уточнении этого понятия в разных отделах геометрии ему придаётся различный смысл.

1) В школьном курсе геометрии рассматриваются плоскости, многогранники, а также некоторые кривые поверхности. Каждая из кривых П. определяется специальным способом, чаще всего как множество точек, удовлетворяющих некоторым условиям. Например, поверхность шара - множество точек, отстоящих на заданном расстоянии от данной точки. Понятие "Поверхность" лишь поясняется, а не определяется. Например, говорят, что поверхность есть граница тела или след движущейся линии.

2) Математически строгое определение поверхности основывается на понятиях топологии. При этом основным является понятие простой поверхности, которую можно представить как кусок плоскости, подвергнутый непрерывным деформациям (растяжениям, сжатиям и изгибаниям). ..."

*Большая советская энциклопедия.

Поверхности составляют широкое многообразие нелинейных фигур трехмерного пространства. Инженерная деятельность человека связана непосредственно с конструированием, расчетом и, изготовлением различных поверхностей. Большинство задач прикладной геометрии сводится к автоматизации конструирования, расчета и воспроизведения сложных технических поверхностей. Способы формообразования и отображения поверхностей, начертательной геометрии составляют основу инструментальной базы трехмерного моделирования современных графических редакторов.

Рассматривая поверхности как непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая уравнением вида ***F(x,y,z)=0***, можно выделить ***алгебраические*** поверхности (***F(x,y,z)***- многочлен n-ой степени) и ***трансцендентные*** (***F(x,y,z)***- трансцендентная функция).

Если алгебраическая поверхность описывается уравнением n-й степени, то поверхность считается поверхностью n-го порядка. Произвольно расположенная секущая плоскость пересекает поверхность по кривой того же порядка (иногда распадающейся или мнимой), какой имеет исследуемая поверхность. Порядок поверхности может быть определен также числом точек ее пересечения с произвольной прямой, не принадлежащей целиком поверхности, считая все точки (действительные и мнимые).

В начертательной геометрии фигуры задаются графически, поэтому целесообразно поверхность рассматривать как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ.

Поверхность можно рассматривать, как совокупность последовательных положений l_1, l_2… линии ***l***, перемещающейся в пространстве по определенному закону (рис.8.11). В процессе образования поверхности линия ***l*** может оставаться неизменной или менять свою форму - изгибаться или деформироваться. Для наглядности изображения поверхности на эпюре Монжа закон перемещения линии ***l*** целесообразно задавать графически в одной линии или целого семейства линий (***m, n, p...***). Подвижную линию принято называть ***образующей***, неподвижные - ***направляющими***. Такой способ образования поверхности принято называть ***кинематическим***.

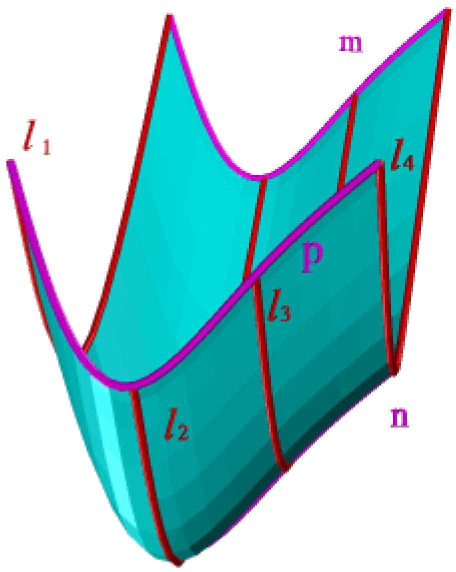


Рисунок 8.11. Поверхность образованная движением линии

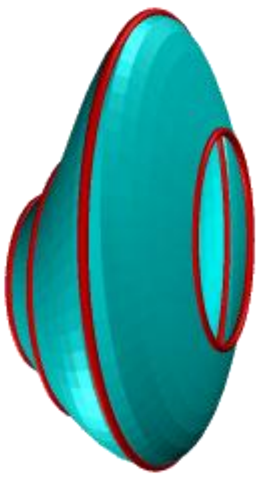


Рисунок 8.12. Циклическая поверхность

Примером такого способа могут служить все технологические процессы обработки металлов режущей кромкой, когда поверхность изделия несет на себе «отпечаток» режущей кромки резца, т.е. её поверхность можно рассматривать как множество, линий конгруэнтных профилю резца.

По виду образующей различают поверхности ***линейчатые*** и ***нелинейчатые***, образующая первых – прямая линия, вторых – кривая.

Линейчатые поверхности в свою очередь разделяют на так называемые ***развертывающие***, которые можно без складок и разрывов развернуть на плоскость и ***неразвертывающиеся***.

Значительный класс поверхностей формируется движением окружности постоянного или переменного радиуса. Это так называемые ***циклические*** поверхности (рис.8.12).

Если же группировать поверхности по закону движения образующей линии и производящей поверхности, то большинство встречающихся в технике поверхностей можно разделить на:

- Поверхности вращения;
- Винтовые поверхности;
- Поверхности с плоскостью параллелизма;
- Поверхности переноса.

Особое место занимают такие нелинейные поверхности, образование которых, не подчинено ни какому

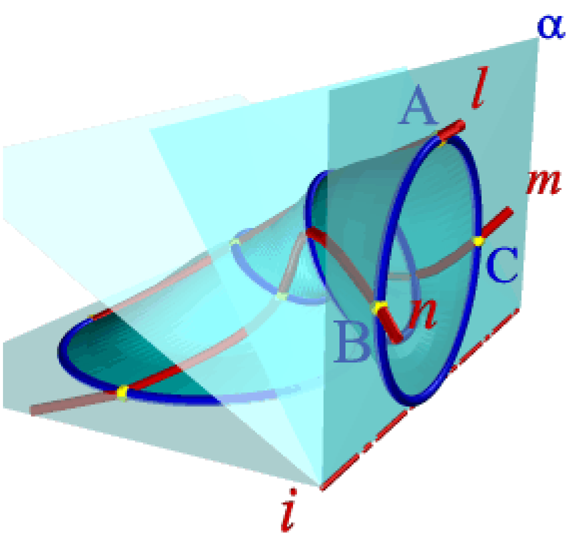


Рисунок 8.13. Образование циклической поверхности

закону. Оптимальную форму таких поверхностей определяют теми физическими условиями, в которых они работают и устанавливают ее форму экспериментально (поверхности лопастей турбин, обшивка каркасов морских судов и самолетов).

Множество линий, заполняющих поверхность так, что через каждую точку поверхности проходит в общем случае одна линия этого множества, называется ***каркасом*** поверхности.

Поверхность может быть задана и конечным множеством точек, которое принято называть ***точечным каркасом***.

Проекции каркаса могут быть построены, если задан ***определитель*** поверхности – совокупность условий, задающих поверхность в пространстве и на чертеже.

Различают две части определителя: геометрическую и алгоритмическую.

Геометрическая часть определителя представляет собой набор постоянных геометрических элементов (точек, прямых, плоскостей и т.п.), которые могут и не входить в состав поверхности.

Вторая часть – алгоритмическая (описательная) – содержит перечень операций, позволяющий реализовать переход от фигуры постоянных элементов к непрерывному каркасу.

Например, циклическая поверхность, каркас которой состоит из окружностей (рис.8.3), может быть задан следующим образом:

- Геометрическая часть определителя: три направляющих ***l, m, n,*** ось ***i*** пучка плоскостей
- Алгоритмическая часть: выделяем из пучка плоскостей с осью ***i*** плоскость ***α***; находим точки ***A, B, C***, в которых ***α*** пересекает соответственно направляющие ***l, m, n***. Строим окружность, определяемую тремя найденными точками. Переходим к следующей плоскости пучка и повторяем построение.

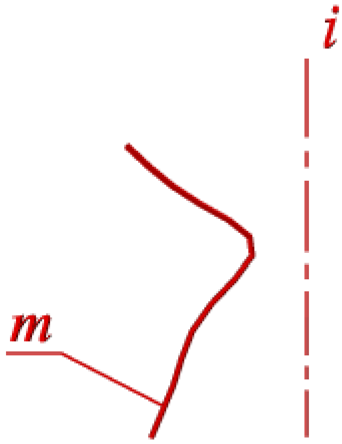
ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ.

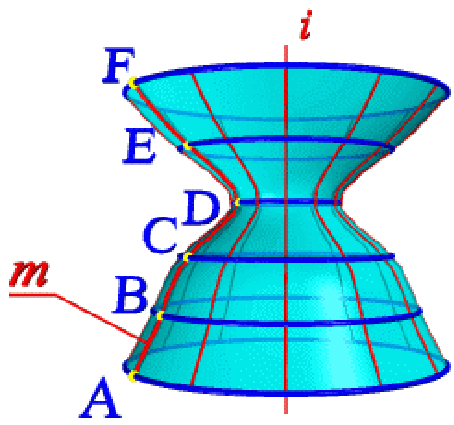
Поверхности вращения – это поверхности созданные при вращении образующей ***m*** вокруг оси ***i*** (рис.8.14)**.**

Геометрическая часть определителя состоит из двух линий: образующей ***m*** и оси ***i*** (рис 8.4.а).

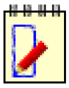
Алгоритмическая часть включает две операции:

1. На образующей ***m*** выделяют ряд точек ***A, B, C, …F***;
2. Каждую точку вращают вокруг оси ***i***.





а) эпюр



б) модель

Рисунок 8.14. Образование поверхности вращения

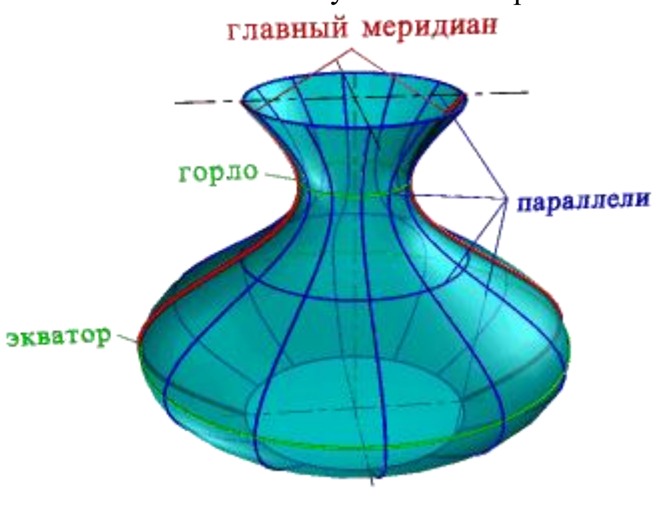


Рисунок 8.15 Поверхность вращения

Так создается каркас поверхности, состоящей из множества окружностей (рис.8.15), плоскости которых расположены перпендикулярно оси ***i***. Эти окружности называются ***параллелями***; наименьшая параллель называется ***горлом***, наибольшая – ***экватором***.

Из закона образования поверхности вращения вытекают два основных свойства:

1. Плоскость перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности – ***параллели***.
2. Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум симметричным относительно оси линиям – ***меридианам***.

Плоскость проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций называется ***плоскостью главного меридиана***, а линия, полученная в сечении, – ***главным меридианом***.

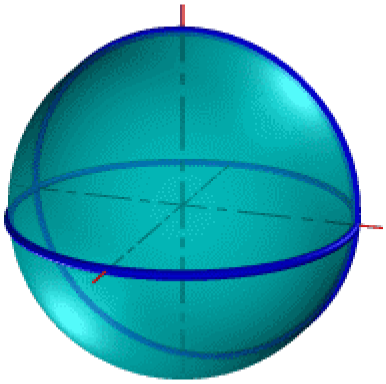


Рисунок 8.16. Образование сферы

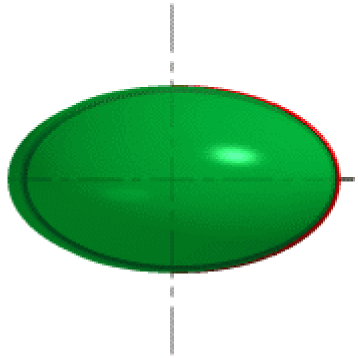


Рисунок 8.17. Образование сфероида

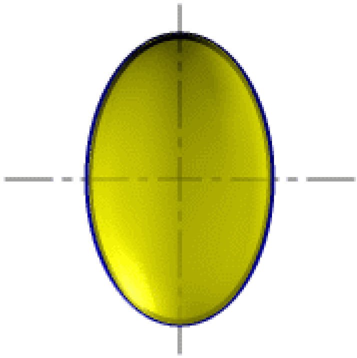


Рисунок 8.18. Образование вытянутого эллипсоида

Рассмотрим наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими:

Сфера – образуется вращением окружности вокруг её диаметра (рис.8.16).

При сжатии или растяжении сферы она преобразуется в ***эллипсоиды***, которые могут быть получены вращением эллипса вокруг одной из осей: если вращение вокруг большой оси то эллипсоид называется ***вытянутым*** (рис.8.18), если вокруг малой – ***сжатым*** или ***сфероидом*** (рис.8.17).

Тор – поверхность тора формируется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр окружности (рис.8.19).

Параболоид вращения – образуется при вращении параболы вокруг своей оси (рис.8.20).

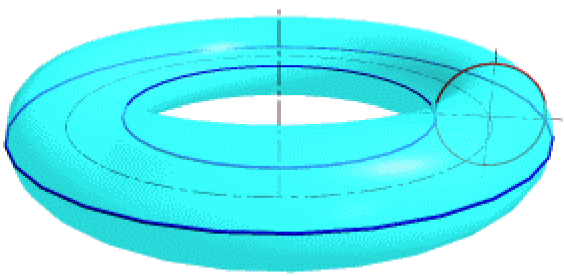


Рисунок 8.19. Тор

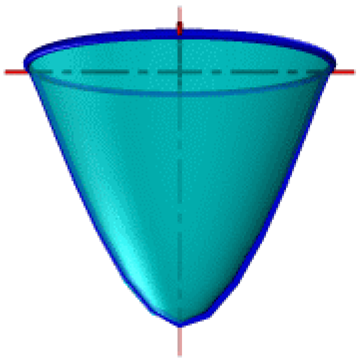
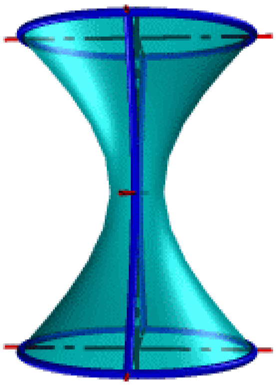
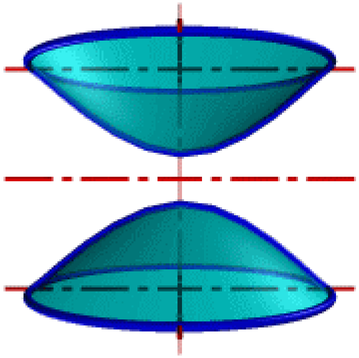


Рисунок 8.20. Параболоид вращения





а) однополостной   б) двуполостной

Рисунок 8.21. Гиперболоид вращения

Гиперболоид вращения – различают одно (рис.8.21а) и двух (рис.8.21б) полостной гиперболоиды вращения. Первый получается при вращении вокруг мнимой оси, а второй – вращением гиперболы вокруг действительной оси.

ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ.

Винтовые поверхности образуются винтовым движением некоторой линии – образующей.

Под винтовым движением понимается совокупность двух движений: поступательного параллельно некоторой оси, и вращательного, вокруг той же оси.

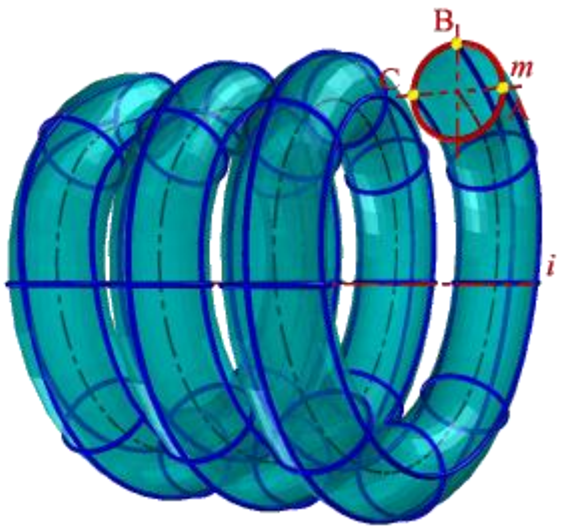


Рисунок 8.22. Винтовая поверхность

При этом поступательное и угловое перемещение находятся в определенной зависимости

$$\Delta \mathbf{h} = \mathbf{k} \Delta \mathbf{v},$$

где Δ**h** – линейное перемещение за время Δ**t,** Δ**v** – угловое перемещение за то же время, **k** – коэффициент пропорциональности. Если **k=Const**, то шаг поверхности постоянный.

Геометрическая часть определителя винтовой поверхности ни чем не отличается от поверхности вращения и состоит из двух линий: образующей **m**, и оси **i** (рис.8.22).

Алгоритмическая часть:

1. На образующей m выделяют ряд точек ***A, B, C***, …
2. Строят винтовые линии заданного шага и направления, по которым перемещаются заданные точки.

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА (ПОВЕРХНОСТИ КАТАЛАНА).

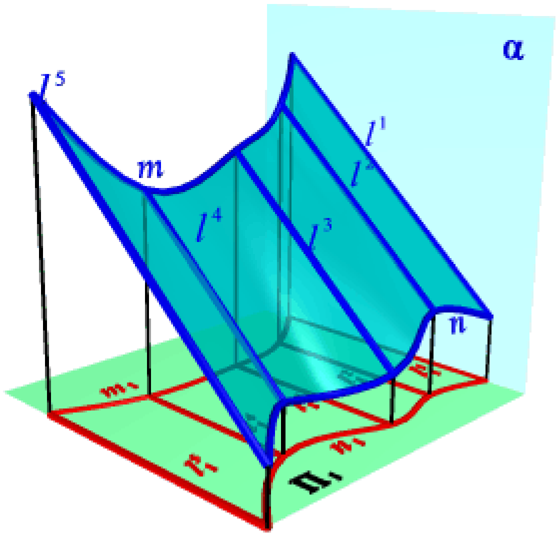


Рисунок 8.23. Цилиндроид

Поверхность с плоскостью параллелизма представляет собой множество прямых линий ***l*** (образующих), параллельных некоторой плоскости ***α*** (плоскости параллелизма) и пересекающих две данные направляющие ***m***, ***n*** (рис. 8.22) направляющих образуются три частных вида поверхностей.

***Цилиндроид*.** Цилиндроидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим кривым линиям, при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма (рис.8.23).

Коноид. Коноидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых кривая линия, а другая прямая, при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма (рис.8.24).

Гиперболический параболоид. Гиперболическим параболоидом или косой плоскостью называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей, параллельной плоскости параллелизма, по двум направляющим линиям – скрещивающимся прямым (рис.8.15).

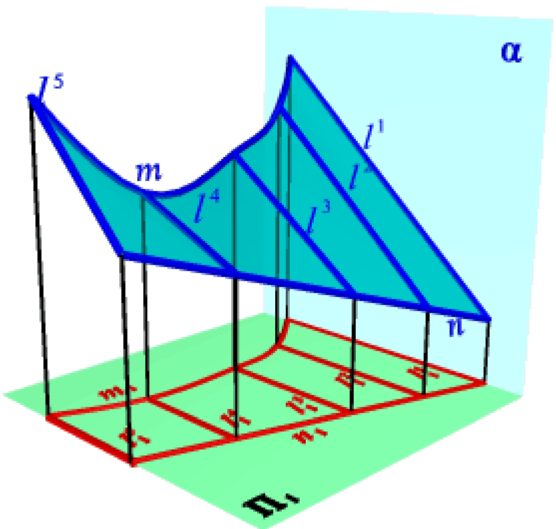


Рисунок 8.24. Коноид

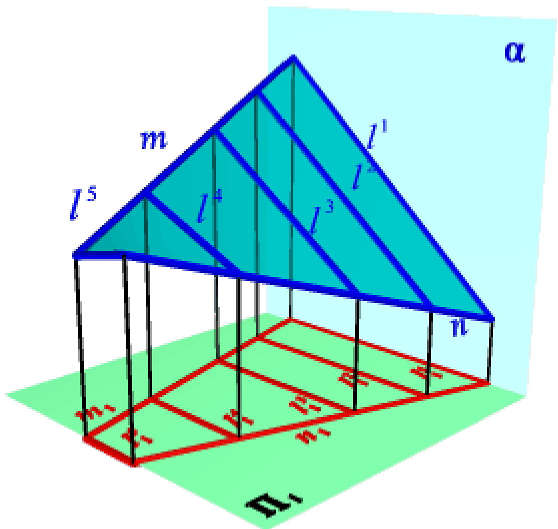


Рисунок. 8.25. Гиперболический параболоид

ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА.

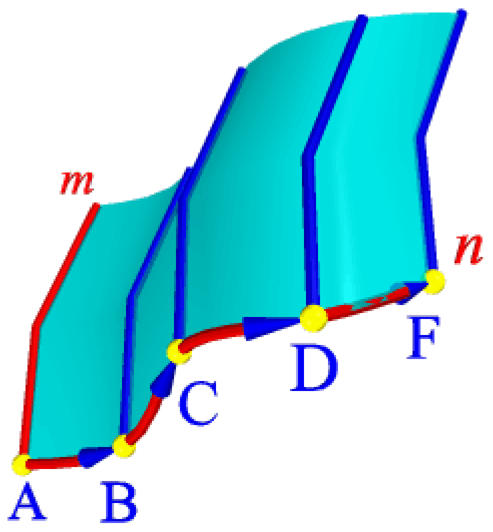


Рисунок 8.26. Поверхность параллельного переноса

Поверхностью параллельного переноса называется поверхность, образованная поступательным плоскопараллельным перемещением образующей - плоской кривой линии ***m*** по криволинейной направляющей ***n*** (рис.8.26).

Геометрическая часть определителя состоит из двух кривых линий образующей - ***m*** и направляющей – ***n***.

Алгоритмическая часть определителя содержит перечень операций:

1.На направляющей ***n*** выбираем ряд точек ***A, B, C,…***

2.Строим векторы ***AB*** , ***BC,…***

3.Осуществляем параллельный перенос линии ***m*** по векторам ***AB***, ***BC*** , ***…***

Наглядным примером плоскости параллельного переноса может служить скользящая опалубка, применяемая в строительстве.